

隨機網路概述

一、隨機網路之沿革

自從 1957 年，要徑法（Critical Path Method, CPM）在美國杜邦公司開始引用，1958 年，美國為北極星導彈計畫，開始引用了計畫評核術（Program Evaluation Review Technique, PERT），當時美國海軍部經過了激烈的辯論，才爭取到了發展北極星計畫（Polaris Missile Project）的龐大預算。

北極星計畫的構想，是以核子動力的潛艇，持續航行，不需升起加油，因此可以一直潛在水底，而不被敵人所發現。當時的工作人員，努力以求突破的重點是：

1. 如何用簡明的圖示，以顯示其設計上的可行性，以及計劃如期完成之可靠性。
2. 除了需要克服技術上的困難外，尚需設法克服管理上的進度協調，以及控制等問題。

PERT 工作小組，採用 CPM 網路作業分析的觀念及方法，幾經修正改良，全力發展成現在的 PERT 技術。PERT 的主要功能為：

1. 在計畫方面

將計畫條理分明、切合目標，並將整體方案逐項分析，層次明確，對於步驟之實施、變換、時間之更動、資源之分配，都可藉助圖示分析比較。

2. 在預算估計方面

利用機率理論，估算作業的起訖時間，估算其可靠性，並能依照實際發生的變化，適當地加以調整。

3. 在管理方面

按照網路圖之指導和控制，很容易地下達命令，分段授權、任務明確，對於工作之管理可以機動性，隨時方便調整，工作成本得以降低。

4. 在協調合作方面

由於工作關係的明確，而且職責分明，很容易協調合作，如果需要支援，也不必過早準備，可以更適切地運用全部資源，因為有了工作網路圖的指示，對於後繼作業時間，能有充分的時間準備。

5. 在檢討方面

利用網路分析已完成的工作，檢討得失，作為日後改善的張本，計畫進行期間，可以運用網圖，進行必要的追查，如有發現問題，可以及時加以修正改過。

然而，由於PERT和CPM在其發展之初，即假設限定在確定性（deterministic）的工作網路，PERT雖然也有一些機率性的假設，但是也同時做了以下的假設限制：

1. 所有的活動作業之間，均為獨立的；
2. 要徑（Critical Path）上的工作總時間，遠較其他路線的工作時間為長；
3. 要徑上有足夠多的作業，從而可以引用中央極限定理，可假設工程周期為常態分配；
4. 每項活動的時間，皆假設服從Beta分配，其平均數為 $\frac{a+4m+b}{6}$ ，變異數為 $\frac{(b-a)^2}{36}$ ，式中， a 為樂觀時間； m 為最可能時間； b 為悲觀時間。

以上之假設，縱然有其合理性，但是終究還是免不了使得PERT和CPM的應用，受到了很大的限制。其限制說明如下：

1. PERT和CPM在工作網路上，都限定在確定性的範圍，網路中的每一項作業都要實現，因而在網路中，不可能存在有機率性分枝之可能，沒有選擇活動或決策的餘地。

2. PERT 和 CPM 的工作網路中，不允許有迴路之發生，這在實際的現實問題上，排除了極為廣泛的回饋問題。
3. 各作業時間假設為 Beta 分配，從理論上或是從實際上，都帶有主觀的成分，事實上各作業時間，應該根據不同的作業性質，假設不同的機率分配。

隨著科學技術的迅速發展，在製造、生產與服務的過程中，隨機的因素愈來愈成為不可忽視的重點。面對各種隨機因素，共同作用於同一個過程，PERT 與 CPM 已經不能完全適用，因而，再改進的一種隨機網路技術應運而生，此即「網圖評核術」（Graphical Evaluation Review Technique, GERT）。

1962 年，E. Eisner 發展出帶有「決策箱」（Decision Box）的廣義工作網路技術。在這些決策箱上，可以按照不同的機率，決定下一步的前進路線，這是具有機率分枝的網路初步形式，此後，又再經過 S. E. Elmaghraby 和 A. A. B. Pritsker 等學者，逐步改進，最後即形成 GERT 的網路技術。

在 GERT 的工作網路，可以允許具有不同的邏輯特性的節點，從每一個節點，可以發出多個機率分枝，GERT 中也允許迴路存在，每個作業時間，可按照其工作特性，假設各種機率分配。至於整個 GERT 之分析運算，則利用各機率分配之動差母函數，再以控制理論中的梅森理論（Mason's Rule），作為解析的工具。

隨著模擬技術的發展，Pritsker 等人又再發展出模擬系統—GERTS。自 1977 到 1979 年，他們又將 GERTS 的主要功能與 GPSS（General Purpose Simulation System）結合起來，形成具有綜合功能的 Q-GERT。在同一個時期，Pritsker 等人又將 GASP-IV 與 Q-GERT 結合一起，發展成 SLAM（Simulation Language for Alternative Modeling），成為功能較全的模擬軟體。

此外，還有 VERT（Venture Evaluation Review Technique），可以分析系統的性能、時間和費用的模擬和決策，其他的尚有：SAINT 可用於人機系統分析模式；PAF（Partitive Analytical Forecasting）可用於核裂變工程的管理決策；GRASP（Graphical Reliability Analysis Simulation Program）可用於系統可靠度分析；P-GERT 專門討論在節點上的活動。各種網路技術之發展過程，見圖 1-1 所示：

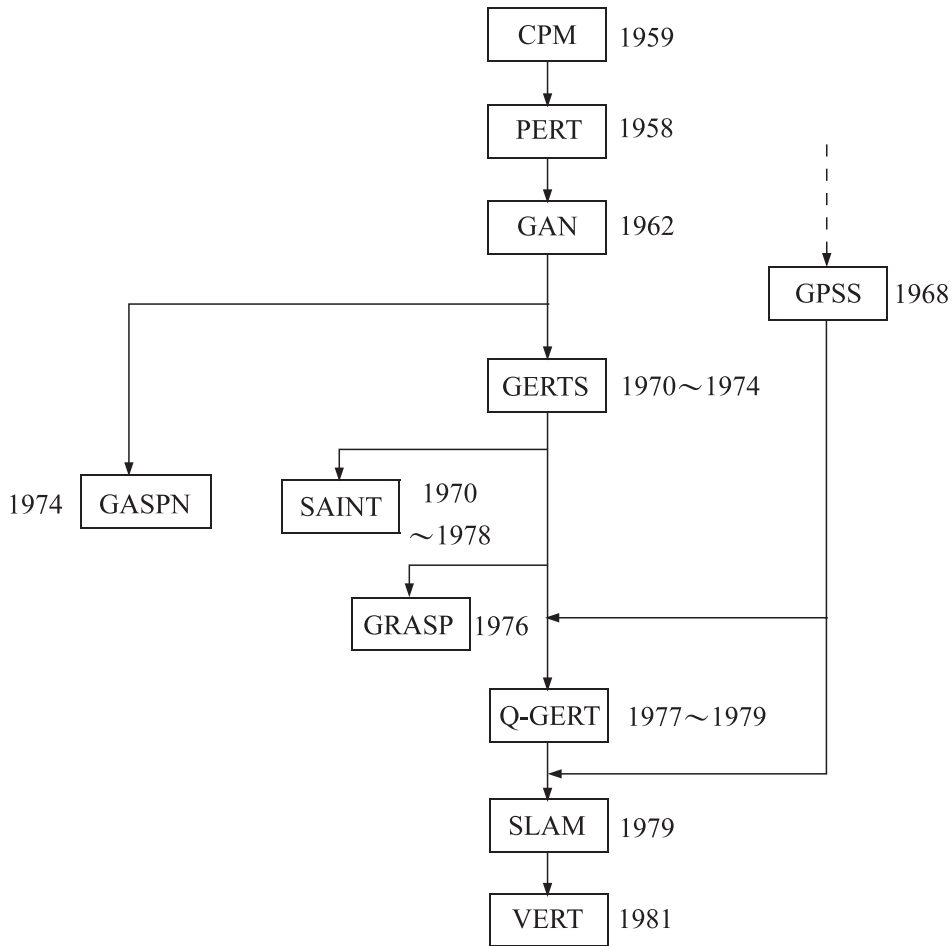


圖 1-1 隨機工作網路之發展過程

二、隨機網路的一般形式

一個工作系統的動態進行，可以看作是系統中各種狀態的轉移過程。亦即，隨著時間的變化，系統會從一種狀態轉移到另一種狀態。隨機網路中的節點，可以表示網路的狀態，而節點與節點之間的箭頭連線，可以視

作狀態之間的傳遞關係。當狀態之間的轉移具有機率性質，狀態之間的傳遞關係也服從某一種機率分配，則此種工作網路，就具有隨機的性質。

在隨機網路中，從某一節點以一定的機率轉移到另一節點，而且假設這種轉移不隨時間而變化，亦即，保證此種系統具有時間的穩定性。當然，若網路中，每個箭頭連線上的機率皆為「1」時，此種網路又恢復到PERT/CPM 網路的情況。

在狀態的移轉過程中，所有的傳遞關係，都是表現在某些隨機變數的變化。例如，時間隨機變數的變化、成本的變化、或是經過某一節點次數的變化，這些傳遞的隨機變數，通常服從某些機率分配，按照解析的技術，在每一箭頭連線，配賦這些隨機變數的動差母函數，或是機率母函數。

以上所述的機率分枝，和傳遞的隨機變數之分配，即構成了GAN 網路中的一般要素，其表示的方式，常用一個向量，加註於各作業的箭頭連線上。見圖 1-2：

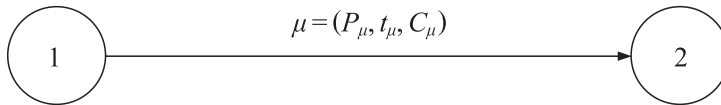


圖 1-2 GAN 網路的一般要素

在圖 1-2 中，

P_{μ} ：表示自節點 1 至節點 2，可能實現此活動之機率。

t_{μ} ：表示自節點 1 至節點 2，此間之活動所需要的時間，其為服從某一機率分配之隨機變數。

C_{μ} ：表示自節點 1 至節點 2，此間活動所需之經費，也是一種隨機變數。

隨機網路中，除了起始點和終端點之外，其它，每一節點至少有一個引入的箭頭連線，同時也允許多個起始節點和終端節點。

任何一個節點，都具有輸入和輸出兩端，在GAN 網路中，輸入端有三種型態，輸出端有兩種型態，一共可構成六種不同邏輯功能的節點。各種

邏輯型態，如圖 1-3 所示：

結構型式	網路圖示	等價向量
串聯型		$P_E = P_a \cdot P_b$ $t_E = t_a + t_b$
並聯「且」型		$P_E = P(a \cap b)$ $t_E = \max(t_a, t_b)$
並聯「或」型		$P_E = P(a \cup b)$ $t_E = \min(t_a, t_b)$
並聯「唯一性」型		$P_E = P(a \otimes b) \text{ [註]}$ $= P(a \cup b) - P(a \cap b)$ $t_E = \begin{cases} t_a, & \text{當取 } P_a \\ t_b, & \text{當取 } P_b \\ \infty, & \text{當取 } P(a \cap b) \text{ 時} \end{cases}$
迴路型		$P_E = \frac{P_a P_b}{1 - P_c}$ $t_E = t_a + t_b + n t_c$ <p>n 為經過迴路 c 的期望次數</p>

[註]⊗表示一個且僅一個事件發生

圖 1-3 GAN 網路節點類型

圖 1-3 中，各類節點之邏輯意義，說明如下：

「唯一性」型輸入：凡是進入此節點的各種作業活動，只要有任何一個作業完成，則此節點所表現的狀態即已完成，但在既定的時刻，一次只有一個作業可以完成。

「或」型輸入：凡是進入此一節點的各種作業活動，只要有任何一個作業完成，則此節點所表示的狀態即已實現，亦即，在既定的時刻，可以不限只能完成一個作業。

「且」型輸入：當所有進入此一節點的作業活動皆已完成，此節點的狀態才算完成實現，亦即，在所有進入的活動，其中最晚完成的時間，才算是此節點的狀態完成實現。

「機率」型輸出：當此節點之狀態實現時，所有的，從該節點所發出的作業，按照既定的分枝機率，分配執行。每一節點所發出的機率總和為「1」。

「定性」型輸出：由此節點所發出的作業活動，都要被執行，PERT/CPM 網路中，各節點即具有此種特性。

三種輸入的邏輯，其中只有「唯一性」型節點，最易於用數學解析方法處理，另外的兩種輸入邏輯，至今尚未發展出簡易適當的解析方法，在處理這種節點時，或可經由適當的邏輯變換，將「或」型（如圖 1-4(b)）和「且」型（如圖 1-4(a)），轉換為「唯一性」型（如圖 1-4(c)）之節點。

GAN 網路的型式很多，但是，從網路結構來看，可以歸納成「串聯」、「並聯」以及「迴路」等三種基本結構。

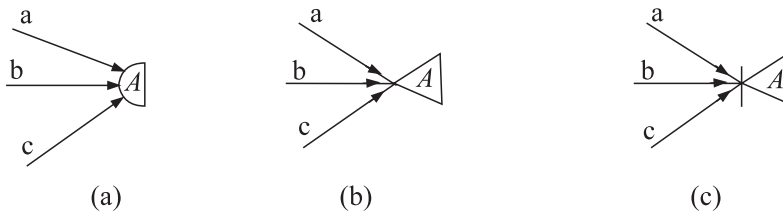


圖 1-4 不同輸入端點之實現可能性

應用以上基本結構，所建構的 GAN 網路，具有以下特質：

1. 由於允許迴路存在，則網路中允許再回頭，重新執行的迴路箭頭連線。
2. 在 GAN 網路中，整個系統的實現，並不代表所有的作業活動都要被執行，而是根據分枝機率，只有一部分的作業會被執行。
3. 對於只有單獨一個箭頭引入的節點，亦即串聯型的網路結構中，不同類型輸入端的邏輯關係皆都相同，因而不論「且」型及「或」型的節點，都可直接用「唯一性」節點來代替。
4. 當有多個作業活動進入「且」型節點時，如圖 1-5，其中節點 3 必須在作業 a 和 b ，都已完成才能實現。顯然，作業 a 被執行的機率為 $P_1 \cdot P_a$ ，作業 b 被執行的機率為 $P_2 \cdot P_b$ 。因此，作業 a 、 b 都被執行的機率為其機率的乘積，亦即，節點 3 被實現的機率為 $P_3 = P_1 \cdot P_2 \cdot P_a \cdot P_b$ ，節點 3 被實現的時間為

$$T = \max(T_1 + t_a, T_2 + t_b)$$

設 $T_1 = T_2 = 0$ ， $P_1 = P_2 = 1$ ，則有 $P_3 = P_a P_b$ ，且有 $t = \max\{t_a, t_b\}$ 。

視 P_E 和 t_E 為節點 S 到節點 3 的等價參數，則可將圖 1-5 改為圖 1-6，以「唯一性」型節點表示。圖 1-6 中的節點 3'，表示不能實現節點 3，其中 t 為實數。

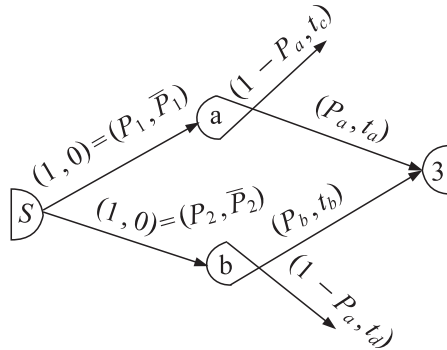


圖 1-5 帶有「且」型節點的網路

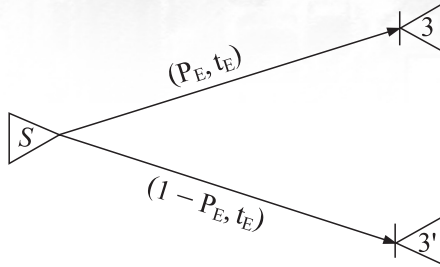


圖 1-6 「且」型節點之等價網路

5. 若有多個作業進入「或」型節點時，如圖 1-7，也可以用「唯一性」型節點表示。變換時，考慮由節點 S 到節點 C 之間，能使節點 C 實現的所有可能的情形：

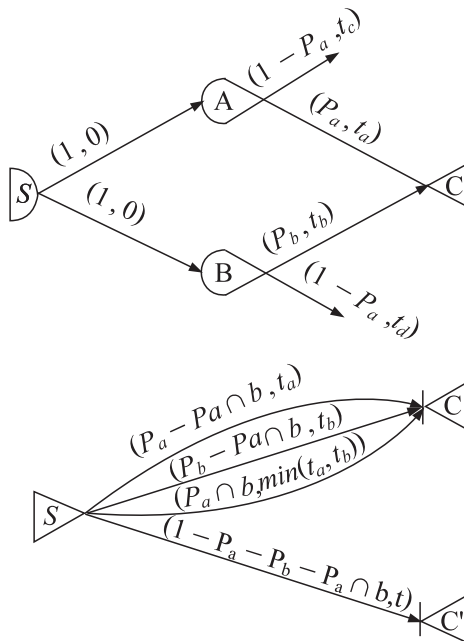


圖 1-7 「或」型節點及其等價轉換

其對應實現之機率和等價時間，列於表 1-1：

表 1-1 「或」型節點之可能事項

活動發生	機率	等價時間
a 發生	$P_a - P_{a \cap b}$	t_a
b 發生	$P_b - P_{a \cap b}$	t_b
a、c 都發生	$P_{a \cap b}$	$\min(t_a, t_b)$

6. 網路中的「迴路」只能用於，具有「唯一性」型輸入端的節點上，而在 GAN 網路中，任何「且」型節點或「或」型節點，都可先經過適當的網路邏輯變換，使之轉換成「唯一性」型節點，從而即可用解析法，解此 GAN 網路。（本書以下所介紹的 GERT 網路，就只含「唯一性」型節點的隨機工作網路。）

三、隨機網路實例說明

隨機網路的發展，不斷地因應社會之需要而進步，各家學說理論，展現出的技術不盡相同。大體來說，原理性和小規模的網路，可以借助數學分析性的技術解析，但是規模較複雜的網路，其中數學的運算就已十分困難，經常要借重模擬的技術解決問題。本書編撰的目的，旨在介紹隨機網路分析的理論，因此，本書只準備介紹 GERT 的應用範例及理論，至於 GERTS 及 Q-GERT 等，請參閱本書所附之各種參考文獻。