CHAPTER 1

$A \cdot B = 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 = -5$

$A \cdot B = 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 = -5$
$A \cdot B = 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 = -5$

序曲：常微分方程簡介

$A \cdot B = 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 = -5$
$A \cdot B = 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 = -5$
$A \cdot B = 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 = -5$
$A \cdot B = 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 = -5$
$A \cdot B = 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 = -5$
$A \cdot B = 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 = -5$

這裡所謂的微分方程指的是常微分方程式（Ordinary Differential Equation，縮寫為 ODE）；「常」字用來強調沒有偏微分出現，因為只有一個自變數而已。一個微分方程如

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

就稱為偏微分方程式（Partial Differential Equation，縮寫為 PDE）。這本書乃是為介紹常微分方程式之基本觀念及如何求出一般解之方法而寫的，因此就把「常」字省略掉，簡稱為微分方程。

底下我們從三個方面簡單介紹微分方程：

- 微分方程的意義，其基本問題為何？
- 微分方程的分類，如何個加以分類？
- 微分方程的解集，其解集是何模樣？

1.1 微分方程的意義

微分方程，顧名思義乃是有微分在當中的方程式。所以在此關係式中包含有自變數 x（有時用 t 或其他符號表示），還有 x 的未知函數 $y(x)$ 及其對 x 的各階微分 $y'=\frac{dy}{dx}$，$y''=\frac{d^2y}{dx^2}$，$\cdots$，$y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n}$ 等。如

$$y'=7y+11\text{，}y''=y\text{，}y'^2+\sin^2 x-1=0$$

都是微分方程的例子。顯而易見，$y=e^x$ 滿足第二個微分方程 $y''=y$；我們就說 e^x 是這個微分方程的一個解。當然，這不是唯一的解，因為 e^{-x} 也滿足這個微分方程。那麼到底還有

多少解呢？我們要的是所有的解，如同國中時解代數方程式 $x^2-x-2=0$ 一樣。只不過那時所要解的 x 是一個數，而現今要解的 y 是一個函數。因此之故，微分方程的第一個基本問題是：如何求出所有的解？

然而，還有比這第一個基本問題更根本的問題。有許多的微分方程很難用一個明顯的式子來表示其所有的解。譬如說，最簡單的微分方程 $y'=f(x)$ 相當於求函數 $f(x)$ 的反導數；但你在微積分的時候早就知道，只要 $f(x)$ 是連續函數，那麼反導數就一定存在而且有無窮多個，只不過很多時候（如 $\int e^{-x^2}dx$）你無法用一個初等函數表示出來。所以，如何從一個微分方程本身來決定其解的性質，就成為微分方程的最基本的問題。

實際上也的確如此，雖然沒有解的顯式，依舊可得到許許多多有關解的性質，甚至得到如所欲之精確度的數值解。因此之故，一個微分方程可視為某種程度用以描述某函數集的顯式。譬如，我們可證明微分方程

$$y''=y$$

之所有解可表示為

$$y=c_1e^x+c_2e^{-x}$$

此處 c_1, c_2 為任意的常數。然而，這個微分方程

$$y''=y$$

本身，我們也可以把它看成函數集

$$\{c_1e^x+c_2e^{-x} | c_1, c_2 \text{ 為任意的常數}\}$$

的另一種描述的方式。

這許多的函數竟濃縮在一個單一的微分方程中，更凸顯出微分方程是何其精簡的一個式子。難怪許許多多物理學或其他科學上的定律，都是以微分方程的姿態展現在世人眼前。最典型的例子就是牛頓[1]第二定律：力等於質量乘以加速度；對一個直線運動的質點 m，此定律所對應的微分方程為

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$$

描述在時間 t 時位置在 $x(t)$ 的一個運動定律。

在此我們不得不多談一下牛頓，因為他就是那位站在巨人肩膀而看得更遠的超巨人。牛頓之後，從來沒有一個科學家像他；不是那家喻戶曉的愛因斯坦[2]、也不是那個光著身體邊跑邊喊「尤里卡！尤里卡！（希臘話：發現了）」的阿基米德[3]，不是那曾在比薩斜塔舉行了著名的自由落體實驗

---

[1] 艾薩克・牛頓爵士，FRS（Sir Isaac Newton，1643 年 1 月 4 日—1727 年 3 月 31 日）是一位英格爾物理學家、數學家、天文學家、自然哲學家和煉金術士。他在 1687 年發表的論文《自然哲學的數學原理》中，對萬有引力和三大運動定律進行了描述。這些描述奠定了此後三個世紀裡物理世界的科學觀點，並成為了現代工程學的基礎。

[2] 阿爾伯特・愛因斯坦（Albert Einstein，1879 年 3 月 14 日—1955 年 4 月 18 日），理論物理學家，相對論的創立者。

[3] 阿基米德（Archimedes，前 287 年一前 212 年），偉大的古希臘哲學家、數學家、物理學家、科學家。出生於西西里島的敘拉古。

的伽利略[4]、也不是那十分具有音樂天賦的蒲朗克[5]，沒有任何人能與之相比。更確切明白的說，不可能有如牛頓的科學家再現，因為未來世代的科學家不僅擁有許許多多的書籍論文，又有網路圖書館及網際網路等，其資訊來源是豐富的、無與倫比而又方便至極。但牛頓當年什麼都沒有，有的就是伽利略定性分析思想再加上克卜勒關於行星運動的定律。而牛頓先生就這樣站在此二巨人的肩膀更上一層樓，奠基於此他發現掌管宇宙間所有運動的三大定律：

不論是浩瀚無涯之銀河系中的諸星
還是在微世界中繞行原子核的電子
或者是這總是歸根飄飄然的落葉
或是那倘佯遨遊於天上的太空船
全都據守此律

然而曾幾何時，在愛因斯坦相對論的衝擊下，時空與質量的概念早已粉身碎骨；而因果論與確定性的執著，也同時被量子力學摧毀無遺。只有牛頓的運動定律歷經三個世紀的嚴峻考驗，卻仍舊屹立不搖。

是的，就是這樣，牛頓的運動定律並沒有牴觸到愛因斯坦的特殊相對論。牛頓從來沒有說過：力等於質量乘以加速

---

[4] 伽利略・伽利萊（Galileo Galilei，1564 年 2 月 15 日—1642 年 1 月 8 日），義大利比薩城人。偉大的物理學家和天文學家，近代實驗科學的奠基者之一與科學革命的先驅。

[5] 馬克斯・蒲朗克（Max Planck，1858 年 4 月 23 日—1947 年 10 月 4 日），德國物理學家，由於他在黑體輻射方面的研究獲得諾貝爾物理學獎。

度。他的第二定律指出，

作用於一個質量為 m 物體上的作用力 F
等於其動量 $p=mv$ 對時間 t 的變化率。

在數學上，可寫成

$$F=\frac{dp}{dt}=\frac{d(mv)}{dt}=\frac{dm}{dt}\cdot v+m\cdot\frac{dv}{dt}$$

此處牛頓並沒有像我們一樣大膽的將 m 當成常數拿到括弧外面，而是小心翼翼的留在括弧裡面。這意味著質量 m 有可能隨著速度 $v=\frac{dx}{dt}$ 來改變，而這也正是愛因斯坦後來所確認的：質量 m 是速度 $v=\frac{dx}{dt}$ 的函數。因此我們所得到的微分方程為

$$m(t)\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dm}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}=F\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right)$$

遠比上面提到的微分方程複雜得多。若質量 m 為常數，則可消去左式的第二項。將加速度定義為 $a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$，則可得出上面提到的較簡化的二階微分方程（見下一節定義）：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right)$$

這個微分方程說明了一個物體的加速度與作用在物體上的合力成正比，與其質量成反比。

在這本書中，我們將重點放在上述的第一個問題上。我們會告訴你如何在有解的微分方程中以顯式來表示其解，包

括冪級數的形式。除了一些比較特殊的型態如線性微分方程外，通常這是一個非常艱難的問題。至於上述更根本的問題以及一些理論證明，還有其他部門的應用，就等以後的課程再作介紹。

1.2 微分方程的分類

令 n 為一正整數且令 $F：\mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ 為一函數。一個形如

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1.1)$$

的方程式就稱為一個 n 階（order）的微分方程，此處 F 乃連結 x 及未定函數 $y(x)$ 及其對 x 至 n 階的微分 $y' = \dfrac{dy}{dx}$，$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$，$\cdots$，$y^{(n)} = \dfrac{d^ny}{dx^n}$ 之間的關係。因此

$$e^x y'' + 7y' + 11y - \cos x = 0$$
$$(y'')^3 - 7y'y'' + (y^{(4)})^2 = 0$$

分別是二階及四階的微分方程。

第二個微分方程是其最高階微分 $y^{(4)}$ 的二次代數方程式，我們就說其次數（degree）為 2，所以這個微分方程就是一個四階二次的微分方程；而第一個微分方程則是一個二階一次微分方程。

一般而言，一個微分方程若是其最高階微分 $y^{(n)}$ 的 k 次代數方程式，我們就說這個微分方程的次數是 k。大部分我們會碰到的微分方程都是一次，因而可以用下面的式子來表示：

$$y^{(n)}=G(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \qquad (1.2)$$

此 G 為 $n+1$ 個變數的函數。我們會在第二章處理各種形式的一階一次微分方程，而在第三章處理高階一次微分方程，但僅限制於線性微分方程如下所定義的。

一個微分方程形如

$$a_n(x)\,y^{(n)}+a_{(n-1)}(x)\,y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)\,y'+a_0(x)\,y=Q(x)$$

就稱為線性微分方程。所以上面的第一個微分方程是一個二階一次線性微分方程，其中

$$a_2(x)=e^x，a_1(x)=7，a_0(x)=11，Q(x)=\cos x$$

而第二個微分方程則是一個四階二次非線性的微分方程。線性微分方程一定是一次，反之則不然，如 $y'=1+xy^2$ 是一次非線性的微分方程。

1.3　微分方程的解集

現在回到一般 n 階的微分方程（1.1）

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0$$

我們要談到解的問題。記得嗎？這是我們這門課最主要的目的，我們要去解微分方程。那麼解又是什麼呢？這可簡單極了，不就是一個滿足微分方程（1.1）的函數嗎？更明確的說，微分方程（1.1）的一個解就是定義在某區間 (a, b) 上的一個連續函數 f 且其至 n 階的微分 $f', f'', \cdots, f^{(n)}$ 在區間 (a, b) 上

都存在並滿足

$$F(x, f(x), f'(x), \cdots, f^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

譬如說，最簡單的微分方程之一

$$y' = y$$

的一個解就是 e^x；函數定義在$(-\infty, \infty)$且其微分就是它自己，也就是滿足方程 $y'=y$。還有其他解嗎？你說 $7e^x$ 也是。實際上，任何 e^x 的常數倍都是，可以表示為 ce^x。其實不難證明這就是它所有的解，所以我們就說微分方程 $y'=y$ 的一般解（general solution）為 $y=ce^x$。

再看一個更簡單的微分方程

$$y'' = 14$$

在微積分時，你早就學到如何求反導數或不定積分；所以得到

$$y' = 14x + c_1 \Rightarrow y = 7x^2 + c_1x + c_2$$

因此這個微分方程的一般解就是

$$y = 7x^2 + c_1x + c_2$$

如果 $y(x)$ 描述：在時間 x 時一個直線運動質點的位置；那麼此微分方程及其一般解告訴我們：加速度為 14 的直線運動質點之位置函數為

$$y = 7x^2 + c_1x + c_2$$

倘若我們知道它的起始位置 $y(0)=7$ 及起始速度 $y'(0)=11$，則可將 $x=0$ 代入位置函數得到 $c_2=7, c_1=11$，因而得知其位置函數為

$$y=7x^2+11x+7$$

故可由此預測其將來的位置。

這兩個簡單的例子讓我們看到，一個 n 階的微分方程（1.1）之解有時可用一個式子如

$$y=f(x, c_1, \cdots, c_n)$$

來表示，其中 $c_1, \cdots, c_n$ 為任意的常數；亦即任選一組的 $c_1, \cdots, c_n$ 值，就得到微分方程（1.1）的一個解，而且所有其他的解也都可如此得到。因此之故，我們就把此種形式的解稱之為一般解。上面的例子告訴我們這些任意常數的個數與微分方程的階數是一樣的。通常這是對的，但不必然永遠成立。在一些特殊形式的微分方程中，其一般解變成是這些任意常數的線性組合，其中的係數當然是微分方程中自變數的函數。

另一方面，如果所要求的解還需要滿足一些其他所謂的起始值（initial values），我們就把這樣子的問題稱之為起始值問題（initial-value problem），如下：解微分方程（1.1）

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0$$

使得滿足下列的起始條件（initial conditions）

$$y(x_0)=y_0，y'(x_0)=y'_0，\cdots，y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

此處 x_0 為給予的起始點，而 $y_0, y'_0, \cdots, y_0^{(n-1)}$ 為給予的數。