CHAPTER 1

簡單幾何概念

1.1 直　線

【線段，半線，直線】

兩個不同的點 A, B就可以畫出一條線段，這條線段就記做 $\overline{AB}$，而 A, B，就是其端點。

只要記得一個要領：「這兩點 A, B，要盡量離得遠！」（這樣可以減少誤差！）概念上我們可以將線段向兩方無限延伸，而得到一條直線，就記做$\overleftrightarrow{AB}$，那麼它的兩端都無限！

當然我們也可以只在一邊無限延伸，這就得到一條半線，就記做 $\overrightarrow{AB}$，只有一個有限的端點 A，另一端無限。

要知道：我們畫在紙上的東西，永遠是有限的！但我們卻可以想像無限的直線或半線！

註 「$\overline{AB}$ 的長度」應該記做 $|\overline{AB}|$。習慣上我們也就單用 $\overline{AB}$ 表示這個線段的長度！當然這就是 A, B兩點的距離 $d(A, B)=\overline{AB}$！（d=distance，距離。）
過平面上不同的兩點 A, B，就恰好可以畫一條直線。

【三角形】

如果三點 A, B, C 不在一條線上，那麼，兩兩畫出線段，就圍得一個真正的三角形（區域），記做$\triangle ABC$。

這三點稱為三個頂點，而三個線段，稱為三個對應邊：

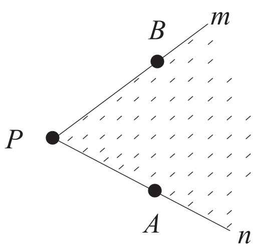
$$c=\overline{AB}，a=\overline{BC}，b=\overline{CA}$$

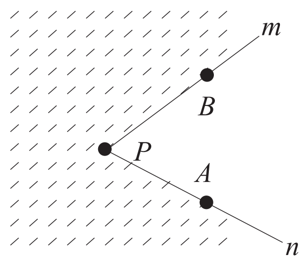
於是：

$$a + b > c > |a - b|$$

【角域與角度】

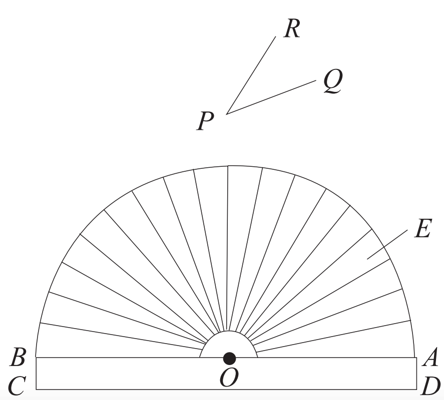
兩條「半線」PA, PB，有共同的端點 P 時，除非它們連成一線 APB，否則，就形成了兩個範圍，分別叫做劣角域（下左圖）與優角域（下右圖）；除非特別指明，我們寫 $\angle APB$ 都是指劣角域。如果圖中再無別的線段半線以 P 為端點，我們就單寫個 $\angle P$ 代表這個角域。角域或者簡稱「角」，可以用量角器來度量！在通常的巴比倫制，優角就是 $> 180°$，而劣角就是 $< 180°$。$\angle APB$ 的角度，應該記作 $|\angle APB|$。習慣上我們也就單用 $\angle APB$ 表示這個角度。

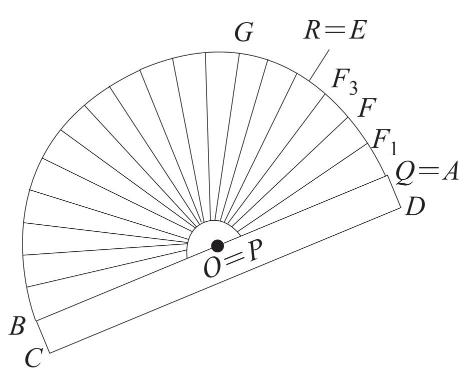




註 當 $\angle APB = 180°$時，兩條「半線」PA, PB就連成一線！於是寫 $\angle APB$ 就不知道你指的是那兩個平角之中的哪個了！

【量角器】





左圖上，有一角$\angle QPR$（此地，$|\angle QPR|=37°$），我們就解釋為：與圖左下（量角器！）的角$\angle AOE$ 合同！

$$\angle QPR \cong \angle AOE$$

量角器是個透明板，所以合同操作就很清楚了！量角器有基線 $\overline{AB}$，原點或基準頂點是 O 點；我們可以平移它到所要量度的角$\angle QPR$ 之頂點 P 處去，然後又旋轉，就可以把「一邊」$\overrightarrow{OA}$ 合同於 $\overrightarrow{PQ}$ 。

通常的量角器把平角分割為 180 等份，（我們這裡只顯現到平角的 18 等份即 10°。）如此，在本例，量角器上 $\overrightarrow{OE}$ 與 $\overrightarrow{PR}$ 重合，因此由量角器所標示的 37°，知道：

$$|\angle QPR|=|\angle AOE|=37°$$

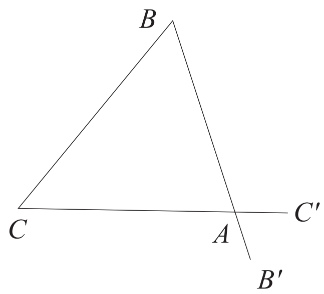
【內角和定理】

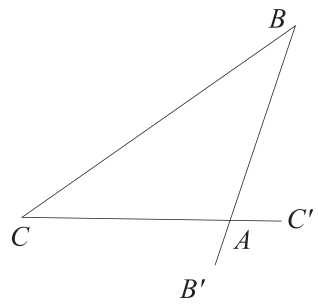
如果有個三角形 ABC，我們常單寫$\angle A=\angle BAC$，這是內角，外角是（下圖中的）$\angle CAB'$ 或$\angle BAC'$，因此，

$$內角+外角=180°$$

$$\angle A+\angle B+\angle C=180°$$

銳角三角形與鈍角三角形的情形，分列下圖左右！





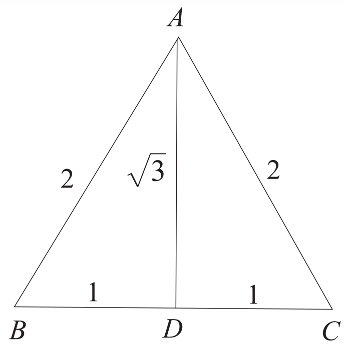
【正三角形】

若三角都相等，則都是 60°，成了正三角形，也就是等邊三角形！

將正三角形「對半」，就得到常見的直角三角板$\triangle ABD$, $\triangle ACD$，（角度為

（30°, 60°, 90°）三邊長的比例是：

$$1 : \sqrt{3} : 2$$

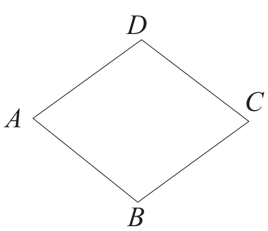


【多邊形】

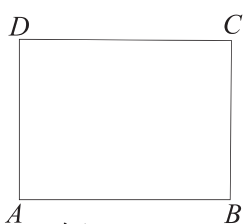
如果有 N（> 2）個點：$P_1, P_2, \cdots, P_N$，我們依次連接線段，$\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ⋯ , $\overline{P_{N-1}P_N}$ ，再加上線段 $\overline{P_NP_1}$ ，就連出一個 N 段閉折線。

設：不同的兩段，最多只有共同的一點，即一端點且這兩段就是相鄰邊；則：這閉折線就圍出一多邊形（區域），記作 ð$_O(P_1P_2\cdots P_N)$。它有 N 個頂點，N 個邊，與 N 個內角！

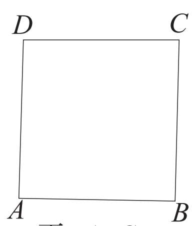
通常三「邊」形 ð$_O(ABC) = \triangle ABC$ 稱作三「角」形，$N > 3$ 時，比較常用「邊」。此時，等邊不必等角，等角不必等邊；必須等邊又等角，才叫做正多邊形。四邊形我們特別用記號□。當四邊形的內角都是 90°（換句話說：相鄰邊垂直）時，這是個矩形（長方形）；而當四邊形的各邊等長時，這是個菱形。故正方形就是「矩形且菱形」。



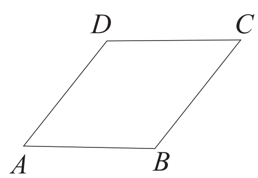
菱□$ABCD$



矩□$ABCD$



正□$ABCD$



平行□$ABCD$

【平行線】

兩條線 ℓ, m，不論如何延伸，都不相交，就叫做「平行」，記成：

$$\ell \parallel m$$

如果給你一條直線 ℓ ，又有一點 P，不在這條線上，那麼一定可以作出一條直線 m，經過 P 點，而且與 ℓ 平行，這樣子的平行線 m 只有一條！

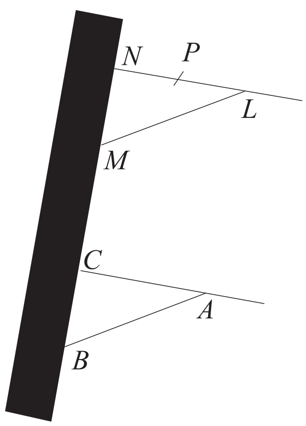
【作圖題：平行線的畫法】

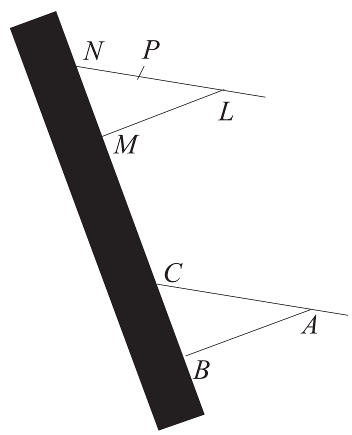
（如果你有一根尺，及一個三角板。）

・讓三角板的一股 $\overline{CA}$，重合於直線 ℓ ，按壓住它！

・然後讓那根尺與三角板的另一股 $\overline{CB}$ 密合；現在按壓住這根尺！尺的位置就是直線 $n=\overleftrightarrow{CB}$ 。

・現在讓三角板在那根尺上「滑移」，$\overline{CB}$ 就是在 n 上變動的線段！我們要滑移到使三角板的另一段 $\overline{CA}$ 通過 P 點（圖中，三角板 ABC 滑移到新位置 LMN），那麼畫出直線 $m=\overleftrightarrow{CA}$（新位置是 $\overleftrightarrow{NL}$ ），就是所求！





註 通常的直角三角板，都是(30°, 60°)的「一二三直角三角板」，(30°, 60°, 90°是30°的一二三倍！）其實，我們的作法是利用同位角定理的逆，和三角板的形狀無關！左圖中，同位角是用：

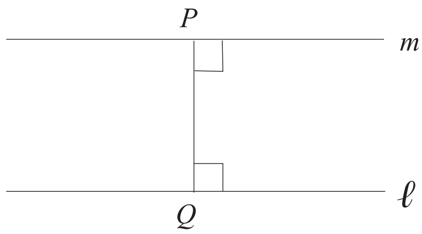
$$|\angle LNM|=|\angle ACB|=90°$$

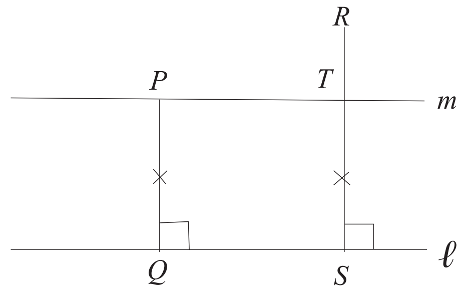
右圖中，同位角是用：

$$|\angle LNM|=|\angle ACB|=60°$$

【希臘規矩作圖法】

如果沒有（＝「不能用」！）三角板，那麼你可以有許多方法；如下，舉兩個例子：





圖左：

- 先過 P，作垂線 $\overline{PQ}\perp\ell$ ；再過 P，作垂線 $\overleftrightarrow{PR}\perp\overline{PQ}$。
- 那麼就得到所求：$m=\overleftrightarrow{PR}\parallel\ell$ 。
- 這個道理可以簡括為：「垂直線的垂直線是平行線」！

圖右（也許是更好的作圖法）：

- 先過 P，作垂線 $\overline{PQ}\perp\ell$ （垂足Q）。
- 再任選一點 R，不在$\overleftrightarrow{PQ}$上，而且與 P 在 ℓ 的同一側，於是過 R，作垂線 $\overline{RS}\perp\ell$ （垂足 S）。
- 在 $\overrightarrow{SR}$ 上，擇取 T 點，使得：$ST=QP$。
- 則$\overleftrightarrow{PT}$即是所求！

這個道理是：四邊形 $PQST$，若有：

$$|\angle PQS|=|\angle TSQ|=90°；PQ=TS$$

則必：$\overleftrightarrow{PT}\parallel\overleftrightarrow{RS}$。

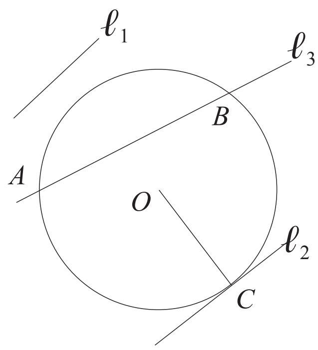
1.2 圓

【圓】

給一點 P（叫做圓心），以及另外一點 Q，就可以用 $\overline{PQ}$ 做半徑，畫出一圓：圓上的點恰好與 P 相距為 $\overline{PQ}$。（記號是$\odot(P;Q)$，或者 P_Q。）請問你如何畫出？

【圓與直線】

平面上一圓與一直線 ℓ 的關係位置，恰有三種：



・相離：沒有交點（情況如 ℓ_1）

・相切：恰有一個交點（情況如 ℓ_2）
交點 C 叫做切點，直線稱為圓的切線。

・相割：有相異兩交點（情況如 ℓ_3）
交點 A, B 叫做割點，直線稱為圓的割線。

【圓內圓外】

如果有一圓 λ，圓心 P，半徑 r，而點 Q 與點 P 的距離：

$\overline{PQ} > r$，則 Q 在圓 λ 外。

$\overline{PQ} < r$，則 Q 在圓 λ 內。

【切線】

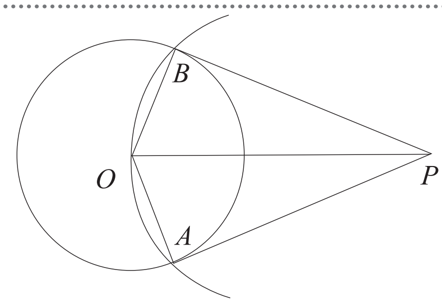
過圓 λ 外一點 P，必可畫出兩條切線！

【切線作圖法】

・以 λ 的圓心 O 與點 P 的線段為直徑畫圓。

・兩圓交於兩點 A 與 B，此即切點。

・連線 $\overleftrightarrow{PA}, \overleftrightarrow{PB}$，即所求兩切線。



1.3 軌跡，三角形的心

【軌跡】

幾何的問題，最常見而且最重要的一類，就是軌跡的問題。舉個最簡單的例子：

給你一點 P，又給你一段長度 r，問：什麼樣的點，會「與 P 的距離為

r？」所有符合這條件的點，都在「以 P 為圓心，r 為半徑的圓」上。（反過來說也對：此圓上的點，也都符合這條件！）

軌跡的問題，就是給出一（些）個條件，然後問：什麼樣的點，會滿足這（些）個條件？通常這些點就組成一條曲線，我們就說：符合這條件的動點之軌跡，就是這條曲線！（上面這例子的軌跡就是一圓。）

【廣義的軌跡】

當然，有時候，符合這（些）條件的動點，不組成（曲）線，而是組成一大片區域（叫做解答域），或者只有少數幾點（叫做解答點）。這是廣義的軌跡問題。

【中垂線】

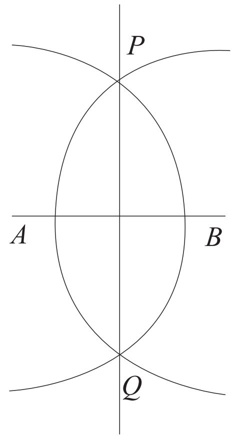
對於相異兩點 A, B，求與它們等距的動點之軌跡！

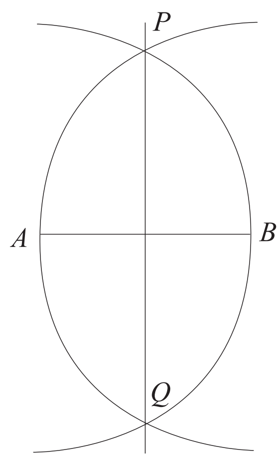
答案是：此線段 $\overline{AB}$（或這兩點 A, B）的中垂線（＝垂直平分線）。

【中垂線作圖】

以足夠大之相同半徑，各以 A, B 為心，畫兩圓，相交於兩個交點 P, Q，此兩交點連線 $\overleftrightarrow{PQ}$，就是所求！

（半徑取為線段長 AB，如右圖，當然方便，但不是必要的！）

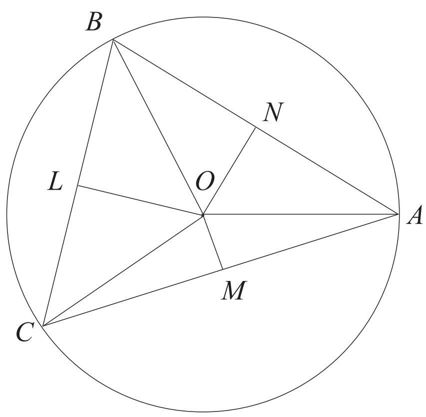


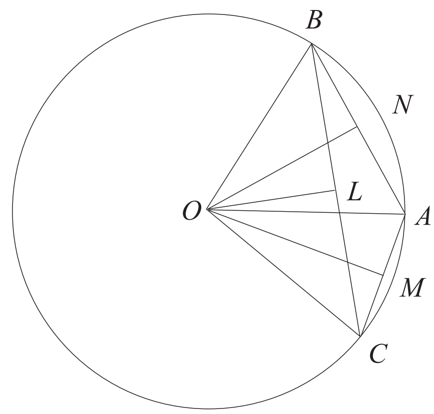


【外接圓，外心】

對於不共線的三點 A, B, C，求一點與它們等距！

答案是：只有一點 O，稱為三角形 ABC 的外接圓心。只要將這三點連結成一三角形，這三角形的三邊之垂直平分線有共同的交點，就是所求！

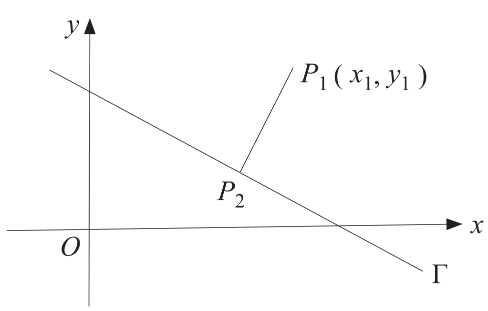


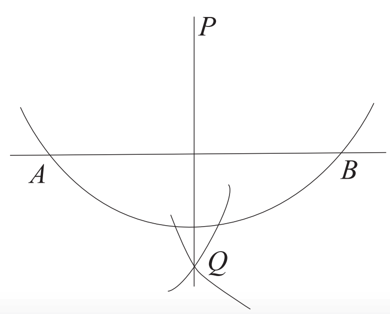


【垂足與垂線】

如果給你一條直線 Γ，以及直線外的一點 P_1，請在直線上找到一點 P_2，使得它與 P_1 的距離盡量的小！

答案就是：自 P_1 作一條直線與 Γ 垂直，交點稱做點 P_1 到直線 Γ 的垂足，這就是所求（下左圖）！而此最短距離就是「點 P_1 到直線 Γ 的距離，簡稱點線距」。



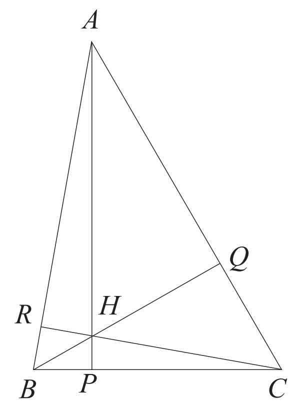


【垂足與垂線作圖法】

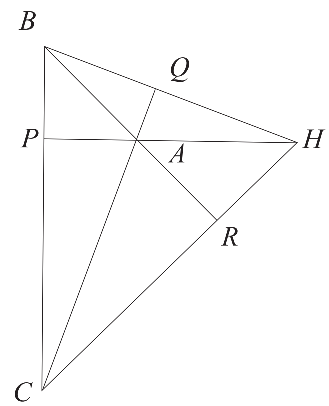
（上右圖）先以 $P=P_1$ 為圓心作圓，交直線 Γ 於兩點 A, B，以同樣這半徑，但各以 A, B 為心，畫圓交於另外一點 Q，則 $\overleftrightarrow{PQ}$ 即所求！

【垂心】

自三個頂點到對應邊作垂線，這三條高線 $\overleftrightarrow{AP}, \overleftrightarrow{BQ}, \overleftrightarrow{CR}$ ，相交於一點 H，叫做垂心。



銳角△ABC



鈍角△ABC

【分角線】

如果給你一個角∠AOB，請在這個角的範圍內，找動點 P，使得：它到兩邊 OA, OB 的點線距相等！

此動點之軌跡為這個角的分角線！分角（半）線 OP 真的把這個角∠AOB 分成相等的兩半！（下左圖）

$$\angle AOP=\angle POB=\angle\frac{1}{2}AOB$$