5q151.tpf-1 3/30/2009 15:54:20

Chapter 1

單變數函數的微分

問題 01 右極限・左極限

計算下列極限。

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-2}{x^2-x}$　　(2) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x-a}{x^2-4}$

解說　關於 $\lim_{x\to 3}(2x-1)(x+2)^2=(2\cdot 3-1)(3+2)^2=125$, $\lim_{x\to 2}\dfrac{2x-1}{x+3}=\dfrac{2\cdot 2-1}{2+3}=\dfrac{3}{5}$ 這樣的極限計算應該沒問題。但是，如果將例如 $\lim_{x\to 2}\dfrac{3x}{x-2}$ 的問題計算成 $\dfrac{3\cdot 2}{2-2}=\dfrac{6}{0}$ 就不行了（這樣的數無法定義）。

請用下述方式思考。所謂 $x\to 2$，是指 x 從異於 2 之值向 2 接近，在 x 取的值比 2 大且向 2 接近的情況（**右極限**）下，可視為

$$x=2.000\cdots 1\text{，那麼}\frac{3x}{x-2}=\frac{6.000\cdots}{0.000\cdots 1}\to\infty$$

在 x 取的值比 2 小且向 2 接近的情況（**左極限**）下，可視為

$$x=1.999\cdots 9\text{，那麼}\frac{3x}{x-2}=\frac{5.999\cdots}{-0.000\cdots 1}\to -\infty$$

因為兩者不一致，$\lim_{x\to 2}\dfrac{3x}{x-2}$ 的極限不存在。

這種情形用 $y=\dfrac{3x}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+6}{x-2}=\dfrac{6}{x-2}+3$ 的圖形很容易理解。

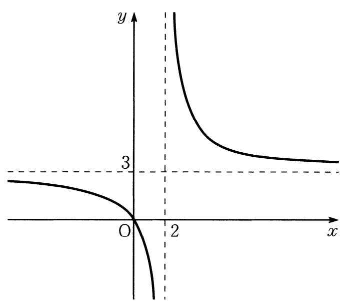
實際上

右極限 $\lim_{x\to 2+0}\dfrac{3x}{x-2}\left(=\dfrac{6}{2+0-2}=\dfrac{6}{+0}\right)=\infty$

左極限 $\lim_{x\to 2-0}\dfrac{3x}{x-2}\left(=\dfrac{6}{2-0-2}=\dfrac{6}{-0}\right)=-\infty$

因此 $\lim_{x\to 2+0}\dfrac{3x}{x-2}\neq\lim_{x\to 2-0}\dfrac{3x}{x-2}$

所以 $\lim_{x\to 2}\dfrac{3x}{x-2}$ 的極限不存在



用上述的方法回答即可。（ ）內的答案自行計算，無須寫出。

至於本問題，分母都會趨近於 0，所以請將分母 $y=x^2-x$, $y=x^2-4$ 的圖形畫出，根據圖形來找出左右極限。特別，對(2)來說，$x\to 2$ 時分子 $\to 2-a$，所以 $a=2$ 與 $a\neq 2$ 的情形必須要分別討論。

解答

(1) $x \to 0$ 時，$x-2 \to -2$

再者，$x \to +0$ 時，Ⓐ$x^2 - x \to -0$。因此，

$$\text{Ⓑ} \lim_{x \to +0} \frac{x-2}{x^2-x} = \infty \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$x \to -0$ 時，$x^2 - x \to +0$，所以

$$\text{Ⓒ} \lim_{x \to -0} \frac{x-2}{x^2-x} = -\infty \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

因此，由①、②得 $\displaystyle\lim_{x \to +0} \neq \lim_{x \to -0}$，所以

$$\lim_{x \to 0} \frac{x-2}{x^2-x} \text{不存在} \quad \cdots\cdots\cdots（答）$$

(2) $x \to 2$ 時，

$$x - a \to 2 - a, \quad x^2 - 4 \to 0$$

因此，$a=2$ 時，

$$\text{所求} = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots（答）$$

再來，$x \to 2+0$ 的情形，Ⓓ$x^2 - 4 \to +0$

$x \to 2-0$ 的情形，$x^2 - 4 \to -0$

所以，$a>2$ 時，因為 $2-a<0$，所以

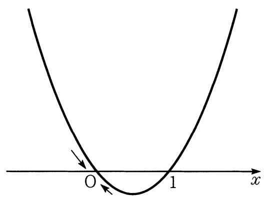
$$\text{Ⓔ} \lim_{x \to 2+0} \frac{x-a}{x^2-4} = -\infty, \quad \lim_{x \to 2-0} \frac{x-a}{x^2-4} = \infty$$

$a<2$ 時，因為 $2-a>0$，所以

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{x-a}{x^2-4} = \infty, \quad \lim_{x \to 2-0} \frac{x-a}{x^2-4} = -\infty$$

因此，$a \neq 2$ 時，$\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x-a}{x^2-4}$ 不存在 $\cdots\cdots$（答）

Ⓐ $y = x^2 - x \cdots$的圖



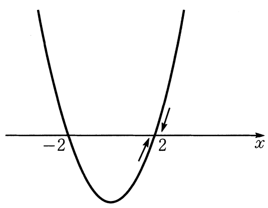
Ⓑ $\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{x-2}{x^2-x} = \frac{-2}{-0} = \infty$

Ⓒ $\displaystyle\lim_{x \to -0} \frac{x-2}{x^2-x} = \frac{-2}{+0} = -\infty$

理解度 Check！

能確認 $x \to +0$, $x \to -0$ 為 $\boxed{A}$。完整寫到（答）為 $\boxed{B}$。

Ⓓ $y = x^2 - 4$ 的圖



Ⓔ $\displaystyle\lim_{x \to 2+0} \frac{x-a}{x^2-4} = \frac{2-a}{+0}$

$= \dfrac{\text{負的定數}}{+0} = -\infty$

理解度 Check！

能分別 $a=2, a \neq 2$ 的情形為 $\boxed{A}$。完整寫到（答）為 $\boxed{B}$。

練習問題 01

解答在 p.232

請求出下列極限。

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 2-0} \frac{|x-2|}{(x-2)^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

問題 02 不定型極限

計算下列極限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x-x^2}-2}{\sqrt{1-x^3}-\sqrt{1-x}}$ (2) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2-4x-2}+x)$

解說 當 $\alpha>0$ 時，下面是求 $x\to\infty$ 的極限的基礎

$$\lim_{x\to\infty} kx^{\alpha}=\begin{cases}\infty & (k>0)\\ 0 & (k=0)\\ -\infty & (k<0)\end{cases},\ \lim_{x\to\infty}\frac{k}{x^{\alpha}}=0 \quad (k\text{ 為定數})$$

再者，$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x}{x^2-2x+3}$, $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+x})$ 等等的問題，我們雖然能用 $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$ 來表示，但只有這樣的話，極限是無法確定的。這樣的極限稱為**不定型**極限，必須要用諸般手段將不定型的要素除去來求極限。除了上述類型之外，不定型極限還有 $0\times\infty$, ∞^0, 1^{∞}, 0^0 等等，代表性的不定型處理技巧如下。

① $\dfrac{0}{0}$ 分數式⇒約分，無理式有理化

② $\dfrac{\infty}{\infty}$ 分數式⇒用分母的最高次項同除分子、分母

③ $\infty-\infty$ 多項式⇒將最高次項括號起來考慮

無理式有理化 $\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}=\dfrac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}\right)$

使用以上方法，可知

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x}{x^2-2x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{4}{x}}{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=\frac{3}{1}=3$$

$$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+x})=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x^2+x)}{x+\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}=-\frac{1}{2}$$

此外，後面會講到的羅必達定理對不定型的計算有很大助益。羅必達定理在第 1 章問題 23（p.46）。

解答

(1) 所求Ⓐ $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(4+x-x^2-4)(\sqrt{1-x^3}+\sqrt{1-x})}{(1-x^3-1+x)(\sqrt{4+x-x^2}+2)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-x)(\sqrt{1-x^3}+\sqrt{1-x})}{x(1-x)(1+x)(\sqrt{4+x-x^2}+2)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^3}+\sqrt{1-x}}{(1+x)(\sqrt{4+x-x^2}+2)}$

$=\dfrac{2}{1\cdot 4}=\dfrac{1}{2}$ ……………………………（答）

(2) 令 $x=-t$，則 $x\to-\infty$ 時 $t\to\infty$

所求 $=\lim\limits_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+4t-2}-t)$ Ⓑ

$=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^2+4t-2-t^2}{\sqrt{t^2+4t-2}+t}$ ……………………… ①

$=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{4t-2}{\sqrt{t^2+4t-2}+t}$ Ⓒ

$=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{4-\dfrac{2}{t}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{t}-\dfrac{2}{t^2}}+1}$

$=\dfrac{4}{2}=2$ ……………………………………（答）

（參考）　類似(2)的題目，出現了 $t^2+4t-2=(t+2)^2-6$，在 t 非常大的情況下，

$$\sqrt{t^2+4t-2}=\sqrt{(t+2)^2-6}\fallingdotseq t+2$$ Ⓓ

這麼來看，可得 $\sqrt{t^2+4t-2}-t\fallingdotseq 2$，得

$$\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+4t-2}-t)=2$$

Ⓐ 分子、分母同為無理式，是 $\dfrac{0}{0}$ 的不定型⇒分子、分母雙重有理化

理解度 Check!

注意到上述雙重有理化為 $\boxed{\text{A}}$。完整寫到（答）為 $\boxed{\text{B}}$。

Ⓑ 無理式 $\infty-\infty$ 的不定型有理化

Ⓒ $\dfrac{\infty}{\infty}$ 的不定型⇒用分母的最高次項同除分子、分母

理解度 Check!

能寫到①式為 $\boxed{\text{A}}$。完整寫到（答）為 $\boxed{\text{B}}$。

Ⓓ 在 t 非常大的情況下，從 $(t+2)^2$ 的觀點來看 -6 顯得微乎其微，也就是可以忽略它。這個方法用來驗算很方便。

練習問題 02

解答在 p.232

請求出下列極限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$　　　(2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x-1}+x}$

問題 03 重要的極限值 (1)

請求出下列極限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos x}{x\sin x}$ (2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\csc 3x}{\cos^2 x}$

解說 本題也是 $\dfrac{0}{0}$ 的不定型。

三角函數的不定型極限，原則上要回歸到下列兩個公式來考慮。

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1,\qquad \lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta}=1\ （\theta\text{ 為弧度}）$$

三位一體（同一個角）

例如

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 3\theta}{2\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 3\theta}{3\theta}\cdot\frac{3}{2}=1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^2(1+\cos\theta)}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}=1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin a\theta}{b\theta}=\dfrac{a}{b}$, $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\dfrac{1}{2}$ 這兩個公式記起來也不錯。

再來，要求 $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2\theta)\tan\theta$ 的話，令 $\theta-\dfrac{\pi}{2}=t$，那麼 $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}$ 就會轉為 $\lim\limits_{t\to 0}$，這樣比較好算。根據 $\theta=\dfrac{\pi}{2}+t$，

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2\theta)\tan\theta=\lim_{t\to 0}\left\{\pi-2\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\right\}\tan\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\lim_{t\to 0}\frac{-2t}{-\tan t}$$

$$=\lim_{t\to 0}2\cdot\frac{t}{\tan t}=2\cdot 1=2$$

還有，在 $a\neq 0$ 的情形，

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{a}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin at}{t}=a\ （令\ x=\frac{1}{t}）$$

再者，在本問題的(1)，請利用

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

的公式，將分子轉換為正弦（sin）再解題。

解答

(1) $\cos 5x-\cos x=-2\sin\dfrac{5x+x}{2}\sin\dfrac{5x-x}{2}$

$=-2\sin 3x\sin 2x$

所求 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2\sin 3x\sin 2x}{x\sin x}$ ……………………… ①

$=\lim\limits_{x\to0}(-2)\cdot\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\dfrac{x}{\sin x}\cdot 6$

$=(-2)\cdot1\cdot1\cdot1\cdot6=-12$ ………… （答）

(2) 令 $x-\dfrac{\pi}{2}=t$，在 $x\to\dfrac{\pi}{2}$ 時 $t\to0$

因為 $x=\dfrac{\pi}{2}+t$，得到

$\cos x=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right)=-\sin t$

$\csc 3x=\dfrac{1}{\sin 3x}=\dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi+3t\right)}$

$=-\dfrac{1}{\cos 3t}$ ……………………… ②

因此，

所求 $=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1-\dfrac{1}{\cos 3t}}{\sin^2 t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\cos 3t-1}{\sin^2 t\cos 3t}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{-\sin^2 3t}{\sin^2 t\cos 3t(\cos 3t+1)}$

$=\lim\limits_{t\to0}\left(\dfrac{t}{\sin t}\right)^2\cdot\left(\dfrac{\sin 3t}{3t}\right)^2\cdot\dfrac{-9}{\cos 3t(\cos 3t+1)}$

$=1^2\cdot1^2\cdot\dfrac{-9}{1\cdot2}=-\dfrac{9}{2}$ ……………… （答）

Ⓐ根據 $\dfrac{5x+x}{2}=3x$，可得

$\cos 5x=\cos(3x+2x)$

$=\cos 3x\cos 2x-\sin 3x\sin 2x$

$\cos x=\cos(3x-2x)$

$=\cos 3x\cos 2x+\sin 3x\sin 2x$

這兩式可以常常引用。

理解度 Check!

能看出 sin○sinΔ 的形式，寫到①式為$\boxed{A}$。完整寫到（答）為$\boxed{B}$。

Ⓑ $\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi+3t\right)$

$=\sin\left(2\pi+3t-\dfrac{\pi}{2}\right)$

$=\sin\left(3t-\dfrac{\pi}{2}\right)$

$=-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-3t\right)$

$=-\cos 3t$

Ⓒ使用 $1-\cos\theta=2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$

所求 $=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{-2\sin^2\dfrac{3t}{2}}{\sin^2 t\cos 3t}$

據此計算即可。

理解度 Check!

注意到②的變形為$\boxed{A}$，完整寫到（答）為$\boxed{B}$。

練習問題 03

解答在 p.232

請求出下列極限。

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)}{\sin^4 x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

問題 04 重要的極限值 (2)

請求出下列極限。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log_e(a+2x)-\log_e a}{x}$ （$a>0$）　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x+x^2)^{\frac{1}{x}}$

解 說 (1)是分子為對數函數的$\frac{0}{0}$不定型。(2)是形如$\{1+f(x)\}^{g(x)}$的1^{∞}（或$1^{-\infty}$）不定型。這樣的場合原則上要回歸到e的定義：

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e \qquad (e=2.71828\cdots) \qquad \cdots\cdots①$$

三位一體

e是一個被稱為**自然對數之底數**的無理數。從①式可以導出下列公式。

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log_e a \quad (a>0),\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

以下以$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ 為例（這剛好是函數$f(x)=e^x$要求$f'(0)$的情形）

令$e^x-1=h$，得$x=\log_e(1+h)$，$x\to 0$ 的時候$h\to 0$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{\log_e(1+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\log_e(1+h)^{\frac{1}{h}}}$$

$$=\frac{1}{\log_e e}=1$$

使用以上的定義與公式，可得

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\}^2=e^2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^x-1\right\}}{x}=\lim_{x\to 0}2^x\times\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x-1}{x}$$

$$=1\times\log_e\frac{3}{2}=\log_e\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{-x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^x\right\}^{-1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)\right\}^{-1}=(e\cdot 1)^{-1}=\frac{1}{e}$$

在本問題的(2)之中，令$x+x^2=y$，得到的新算式有包含①的形式。

5q151.tpf-9 3/30/2009 15:54:20

解答

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log_e(a+2x)-\log_e a}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{\log_e\left(1+\dfrac{2x}{a}\right)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{\log_e\left(1+\dfrac{2x}{a}\right)}{\underset{Ⓐ}{\dfrac{2x}{a}}}\cdot\dfrac{2}{a}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{2}{a}\log_e\left(1+\dfrac{2x}{a}\right)^{\frac{1}{\frac{2x}{a}}}$

$=\dfrac{2}{a}\cdot\log_e e=\dfrac{2}{a}\cdot 1=\dfrac{2}{a}$ ………………… （答）

(2)令 $x+x^2=y$，當 $x\to 0$ 時 $y\to 0$

$\lim_{x\to 0}(1+x+x^2)^{\frac{1}{x}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+y)^{\frac{1}{x}}$ …………………… ①

$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\{(1+y)^{\frac{1}{y}}\}^{\frac{y}{x}}$

此時 $\lim_{x\to 0}\dfrac{y}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x+x^2}{x}$

$=\lim_{x\to 0}(1+x)=1$

所以，所求$=e^1=e$ ……………………… （答）

Ⓐ為了使用

$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$

（三位一體）

將分母換成 $\dfrac{2x}{a}$。

再者，使用公式

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x}=1$ 亦可。

理解度 Check!

可以做到Ⓐ的轉換為$\boxed{A}$，完整寫到（答）為$\boxed{B}$。

另外，令 $2x=h$，則 $x\to 0$ 時 $h\to 0$，則(1)可看成函數 $f(x)=2\log_e x$ 在 $x=a$ 時的導數。

理解度 Check!

做到①式 $x+x^2=y$ 為$\boxed{A}$，完整寫到（答）為$\boxed{B}$。

練習問題 04

解答在 p.232

請求出下列極限。

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-1}{x}$　　(2) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^x$

小知識

e^x, $\log(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$ 等等的函數在 $x=0$ 時的導數，可以推出許多重要的極限值。

$$(e^x)'_{x=0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\quad (\log(1+x))'_{x=0}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$

$$(\sin x)'_{x=0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad (\cos x)'_{x=0}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0$$

問題 05 夾擠原理

在 $a>1$ 時，請求出 $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{a^x}$，再求出 $\lim_{x\to+0} x\log x$。

解說 一般來說，下面的定理會成立。

①若在包含 $x=a$ 的區間 $a-\delta<x<a+\delta$ 之上，$g(x)\leqq f(x)\leqq h(x)$ 會成立，且 $\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} h(x)=\alpha$ 成立，則 $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$。

②在 x 充分大的情況下，若 $g(x)\leqq f(x)\leqq h(x)$ 會成立，且 $\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty} h(x)=\alpha$ 成立，則 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\alpha$。

這些就稱為「**夾擠原理**」。下面舉例說明它的應用。

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$ 是 $\frac{\text{從}-1\text{ 到 }1\text{ 之間的定數}}{\infty}$ 的型態，所以 $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$，但我們也可以用下面的方式思考。

$$\text{因為 } 0\leqq|\sin x|\leqq 1\text{，所以 } 0\leqq\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leqq\frac{1}{|x|}$$

因為 $x\to\infty$ 時，$\frac{1}{|x|}\to 0$，由夾擠原理得 $\lim_{x\to\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|=0$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

再看一題 $\lim_{x\to\infty}(a^x+b^x)^{\frac{1}{x}}$（$a>b>0$）。在 $x>0$ 時 $0<b^x<a^x$ 會成立，所以

$$a^x<a^x+b^x<2a^x \qquad (a^x)^{\frac{1}{x}}<(a^x+b^x)^{\frac{1}{x}}<(2a^x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\therefore a<(a^x+b^x)^{\frac{1}{x}}<2^{\frac{1}{x}}a$$

$$\text{令 } x\to\infty\text{，得 } a\leqq\lim_{x\to\infty}(a^x+b^x)^{\frac{1}{x}}\leqq\lim_{x\to\infty}(2^{\frac{1}{x}}a)=a$$

因此，根據夾擠原理，$\lim_{x\to\infty}(a^x+b^x)^{\frac{1}{x}}=a$。

最後，本問題的 $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{a^x}$（$a>1$ 的情形）是有名的極限值。令 $[x]=n$，也就是說，取自然數 n 使得 $n\leqq x<n+1$，在 $a>1$ 時

$$0<\frac{x}{a^x}<\frac{n+1}{a^n}$$

會成立。再者，$a>1$ 時，令 $a=1+h$（$h>0$），馬上可以看到 $a^n=(1+h)^n$，則二項式定理就可以適用了。如此，就會浮現出能夠應用夾擠定理的不等式。