Chapter 1 矩 陣

- 線性方程組
- 矩陣
- 矩陣的運算
- 逆矩陣
- 基本列運算
- 聯立方程式
- 高斯消去法
- 應　用

在現實生活中，有很多工程、科技、商業及經濟等實際的問題，都可以將它歸納為具有線性（linear）特性的數學模式，而逕予簡化及加以處理；然而在實際應用上，因矩陣（matrix）具有特殊的運算，所以常常被用來解決各種領域中頗為複雜的問題。

本章中我們將介紹線性方程組的特性，並討論各種矩陣有關之性質及其運算，亦將使用矩陣代表方程組，同時，也用來求解線性方程組，並列舉兩個有關例題以供參考。

1.1 線性方程組

線性方程組有很多的理論和實用的場所，如在工程、科學、商業和經濟領域之中，都有廣泛的應用，尤其在近代應用上，有些問題往往需要求解百萬個方程式和未知數，這種系統稱為大型系統（large−scale systems），而其他的系統則稱為小型（small−scale）線性系統。線性方程組及其求解方法之研究，乃為線性代數主要的一個課題。

1.1.1 線性方程式

凡具有 $a_1x + a_2y = b$ 型式的方程式稱為線性方程式（linear equation），其圖形在 xy −平面上為一條直線。一個含有 n 個變數 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n 的線性方程式可以標準式加以表示為：

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

其中係數 a_i ($i = 1, 2, \cdots, n$) 或稱為實數常數（real constant）；而變數 x_i ($i = 1, 2, \cdots, n$) 或稱為未知數（unknows）。

例 1.1.1

下列各方程式均為線性方程式：

$$2x + 3y = 6$$

$$y = x + \frac{1}{3}z - 2$$

$$4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -5$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 10$$

線性方程式 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ 的解（solution）為其未知數 $x_i\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ 含有個數值 $c_i\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ 之集合，使得

$$x_1 = c_1, x_2 = c_2, \cdots, x_n = c_n$$

代入原方程式時，能夠滿足方程式。而由這些解 c_1, c_2, $\cdots$, c_n 組成之集合稱為此方程式的解集合（solution set）或通解（general solution）。

一般上，線性方程式僅可為一次方，而不可為任一變數之開方或其乘積，同時也不得為三角函數、對數函數或指數函數之引數（argument）。

例 1.1.2

下列各方程式均不為線性方程式。

$$2x^2 + y = -4$$

$$x - \cos y = 1$$

$$3x + \sqrt{y} - z = 2$$

$$2x + xy = 6$$

$$\log x + 2y = 3$$

$$x^2 + \pi y = -1$$

例 1.1.3

試解下列兩方程式。

(1) $6x - 3y = 9$

(2) $x + 2y - 3z = 4$

解

⑴可指定 y 為一個任意值，再對 x 求解；或可指定 x 為一個任意值，再對 y 求解，所得結果都相同。設

$$x = t$$

則

$$y = 2t - 3$$

此處 t 為任意參數，t 值不同則所得 x, y 之值也不同。

如 $t = 1$ 時，可得

$$x = 1, y = -1$$

又如 $t = \frac{3}{2}$ 時，則得

$$x = \frac{3}{2}, y = 0$$

⑵可對方程式中兩變數指定為任意之值，再代入求解第三個變數的值。設

$$x = s, y = t$$

代入原式得

$$z = \frac{1}{3}(s + 2t - 4)$$

以上所討論的線性方程式都為實數線性方程式（real linear equation），在另一方面，線性方程式

$$(2 + i)\,x_1 + 3x_2 = 1 + 2i,\ i = \sqrt{-1}$$

則包含了 $a + bi$ 的複數（complex numbers）型式，其中 a, b 皆為實數（real numbers），則稱此線性方程式為複數線性方程式。有關複數線性方程式的一些性質，我們將於第七章中再加以檢討。

1.1.2 線性方程組

在 m 個線性方程式中，而含有相同 n 個未知數 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 依序

出現時，稱為一 $m \times n$ 線性方程組（system of linear equations）或線性系統（linear system）。若 $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \cdots, x_n = c_n$ 為方程組中每一個方程式的解時，則數列 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 稱為此方程組之一解。

例 1.1.4

試求下列方程組的解：

$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 9$$
$$x_1 + 9x_2 + 3x_3 = -4$$

解

上列方程組具有

$$x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 1$$

的解。蓋因這些值均能同時滿足上述兩個方程式。

在所有線性方程組中，並非個個都有解，沒有解的線性方程組稱為矛盾方程組（inconsistent），而至少含有一組解的線性方程組則稱為相容的（consistent）。

例 1.1.5

試判斷下列各方程組，何者為相容的、何者為矛盾方程組。

(1) $3x_1 - 6x_2 = 9$
　$x_1 - 2x_2 = 4$

(2) $4x_1 - 2x_2 = -1$
　$2x_1 - x_2 = 3$

(3) $3x_1 - 2x_2 = -1$
　$4x_1 - 5x_2 = -6$

解

(1)矛盾方程組

(2)矛盾方程組

⑶相容的

底下特地使用圖示來解線性方程組，若有下列兩方程式的方程組：

$$a_1x_1 + b_1x_2 = c_1$$
$$a_2x_1 + b_2x_2 = c_2$$

其中 a_1, b_1 及 a_2, b_2 皆不為零。上述這兩個方程式所代表的圖形均為直線（如圖1.1.1），設兩直線為 l_1 及 l_2，則方程組之解即為直線 l_1 及 l_2 之交點 (x_1, x_2)。這一組線性方程組可能有一組解，無解或無限多組解。

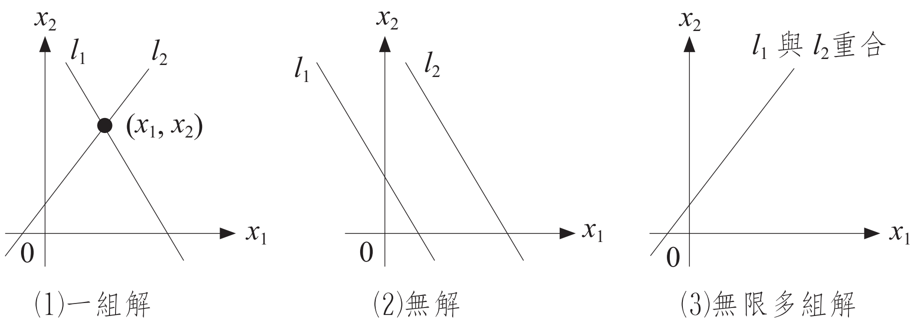

圖1.1.1　線性方程組的圖解

由圖1.1.1可以知道，線性方程組的圖解可以將它歸納為：

⑴兩直線 l_1, l_2 可能僅相交於一點(x_1, x_2)，故方程組恰有一組解。

⑵兩直線 l_1, l_2 可能平行而無交點，故方程組無解。

⑶兩直線 l_1, l_2 可能重疊，而有無限多組交點，故方程組有無限多組解。

例 1.1.6

試以圖解法求下列各方程組的解。

⑴$x + 3y = 12$

$-2x + y = -3$

(2) $2x - y = -3$

$4x - 2y = -2$

(3) $6x + 3y = 9$

$4x + 2y = 6$

解

(1)方程組有一交點，故有一組解 $x = 3, y = 3$。

(2)代表方程組的兩直線平行而無交點，故方程組無解。

(3)方程組中之兩方程式表同一直線，即直線上任何的點都為方程組一組解，故方程組有無限多組解。

1.2 矩陣

矩陣（matrix）即指由一些實數或複數所形成的「矩形陣列」，而使用符號「〔　〕」或「（　）」將數字加以括起來。例如：

$$[2\ \text{-}1]，\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}，\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\-1 & 1 & 6\\-5 & 0 & 4\end{bmatrix}，\begin{bmatrix}1+2i & 3i\\2-i & 2+3i\end{bmatrix}，(-1, 2)$$

而構成矩陣的各數，稱為矩陣的元素（element）。矩陣中橫方向（水平線）的各元素形成矩陣的列（row），縱方向（鉛垂線）的各元素形成矩陣的行（column），從上而下的各列，分別稱為第一列、第二列、……等；從左而右的各行，分別稱為第一行、第二行、……等。一個矩陣的列數與行數分別為 m 或 n 時，則稱為 m 列 n 行矩陣，以記號「$m\times n$」表之，並稱為此矩陣之階數（order）。

定義1.2.1

矩陣

若 m, n 均為正整數，且每一個 a_{ij}（$1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$）皆為實

數（或複數），則型如

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

稱為一個實數（或複數）矩陣，可簡記為 $A=[a_{ij}]$，其階數為 $m\times n$，即矩陣 A 有 m 列及 n 行。

一般都使用符號 a_{ij} 代表位於第 i 列及第 j 行交點的元素，而列行的關係如下：

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ & & \vdots & \end{bmatrix} & \text{第 } i \text{ 列} \\ \text{第 } j \text{ 行} & \end{array}$$

矩陣可依其元素的性質，或各元素間之關係，分為下列幾種不同的矩陣：

1.方陣

在 $m\times n$ 階矩陣 A 中，當 $m=n$ 時，稱矩陣 A 為方陣（square matrix），以 $A=[a_{ij}]_n$ 表示。如

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_2,\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 2 \end{bmatrix}_3$$

2.零矩陣

矩陣中之每一元素均為0時，稱此矩陣為零矩陣（zero matrix, null matrix），以 $\mathbf{0}=[0]_{m\times n}$ 加以表示。如

$$[0]_{m\times n}\text{，}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}_{4\times 3}$$

3.對角矩陣

在一個 n 階方陣 $A=[a_{ij}]_n$ 中，元素 $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{nn}$ 構成主對角線（main diagonal），而不在主對角線上的其他元素皆為0的方陣稱為對角方陣（diagonal matrix）。如

$$\begin{bmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\0&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&&\cdots&\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$$

可簡記為diag($a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$）。

4.單位方陣

在一個 n 階對角方陣中，若主對角線上的元素均為1時，則稱為 n 階單位方陣（identity matrix of order n），以 I_n 表示。如

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\text{，}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}_3\text{，}\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}_n$$

5.純量方陣

設 D 為對角方陣，若其對角線上之元素皆為同一常數 k 時，即 $D=kI$，則稱 D 為純量（或常數）方陣（scalar matrix）。

例 1.2.1

下列各例均為純量方陣。

1. $D_2=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\mathrm{diag}(3, 3)=3I_2$

2. $I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\mathrm{diag}(1, 1, 1)=I_3$

3. $D=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\mathrm{diag}(2, 2, 2)=2I_3$

上例各矩陣中，若不論它的階數，則 I 代表單位方陣（identity matrix）。

6.三角方陣

若一方陣的對角線以下（或上）之各元素皆為0時，稱為上（或下）三角方陣（triangular matrix）。

例 1.2.2

下列各例皆為三角方陣。

(1) $\begin{bmatrix}2 & -1 & 4\\ 0 & 1 & -5\\ 0 & 0 & -5\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0 & -8 & 7\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

以上各矩陣均為上三角方陣（upper triangular matrix）。

(2) $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 2 & 6 & 0\\ 3 & 0 & -2\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$

以上各矩陣均為下三角方陣（lower triangular matrix）。