

CHAPTER 1

[預 備]

1.1 幾個公式

【平方公式】

$$(X+Y)^2 = X^2 + 2 * X * Y + Y^2$$

習題 1

求下各數的平方！

15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95, 105, 245, 995



這一題的意思很清楚！

後面三個，要強調心算：10 * 11 = 110；24 * 25 = 660；99 * 100 = 9900

因此

$$105^2 = 11025 ; 245^2 = 60025 ; 995^2 = 990025$$

習題 2

求以下的近似值！（小數點之下第 5 位）

$$1.00002^2 ; 2.00002^2 ; 10.00003^2$$



強調：

$1.00002^2 \approx 1.00004$ ； $2.00002^2 \approx 4.00008$ ； $10.00003^2 \approx 100.0006$ ；（零的個數！）

【二項式公式】

這是推廣上述公式！

$$(X+Y)^n=X^n+\cdots+C_m^n\ast X^{n-m}\ast Y^m+\cdots+Y^n$$

習題 4

求以下的近似值！（小數點之下第 5 位）

$$1.01^3; 1.02^3; 1.002^3; 1.0003^3$$



強調：末二題，只要展到二次與一次項！

$$1.01^3 = 1.030301; 1.02^3 = 1.061208; 1.002^3 \approx 1.006012; 1.0003^3 \approx 1.00090$$

【平方差公式】

$$X^2 - Y^2 = (X - Y) * (X + Y)$$

習題 5

求算：98 * 102; 51 * 49; 104 * 106; 34 * 36



$$98 * 102 = 10000 - 4; 51 * 49 = 2500 - 1$$

$$104 * 106 = 11025 - 1; 34 * 36 = 1225 - 1$$

習題 6

求算：803 * 807



$$803 * 807 = 648024$$

【割圓恆等式】

這是推廣上述公式！

$$X^3 - Y^3 = (X - Y) * (X^2 + X * Y + Y^2)$$

$$X^4 - Y^4 = (X - Y) * (X^3 + X^2 * Y + X * Y^2 + Y^3)$$

$$X^5 - Y^5 = (X - Y) * (X^4 + X^3 * Y + X^2 * Y^2 + X * Y^3 + Y^4)$$

⋮

習題 7

求算：

$$(X + Y + Z)^2; (X + Y + Z + U)^2; (X + Y + Z + U + V)^2$$

$$(X + Y + Z - U - V + W)^2; (x^2 + 3x + 1)^2$$



強調：和的平方，是平方的和，加上所有交叉項的兩倍！



$$(x^2 + 3x + 1)^2 = x^4 + 6x^3 + (3^2 + 2)x^2 + 6x + 1$$

習題8

分解因式： $x^3 \mp y^3$; $(x^6 - y^6)$ 。



$$x^3 - y^3 = (x - y) * (x^2 + x * y + y^2)$$

用 $-y$ 代 y ，因此：

$$x^3 + y^3 = (x + y) * (x^2 - x * y + y^2)$$

於是

$$\begin{aligned} x^6 - y^6 &= (x^3 + y^3) * (x^3 - y^3) \\ &= (x + y) * (x^2 - x * y + y^2) * (x - y) * (x^2 + x * y + y^2) \end{aligned}$$

註（強調！）若 n 為奇數，則 $x^n + y^n$ 有因式 $x + y$ 。

1.2 記號

1.2.1 集合記號

【記號很重要】

數學是一種「語文」（language），「語文」要使用「文字」，「數學文」中使用的「文字」，除了用一些「拉丁（與希臘）字母」去湊出文字記號，用（印度）「阿拉伯數碼」去湊出「數目」之外，還使用一些記號。

你當然知道四則運算記號： $+$, $-$, $*$, $\div$ ；我們的乘法記號寧可用這個 $*$ ，因為現在用電腦時，通常用這個！除法也經常用 $\div$ 。

【地板函數】

我們用 $\text{floor}(x)$ 表示「不大於 x 的最小整數」！例如：

$$\text{floor}(\pi) = 3 \quad (\text{因為圓周率 } \pi = 3.415926\cdots)$$

$$\text{floor}(\sqrt{5}) = 2 \quad (\text{因為 } \sqrt{5} = 2.236\cdots)$$

$$\text{floor}(-\pi) = -4$$

$$\text{floor}(1 + 3 - 2^2) = 0$$

$$\text{floor}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = 1$$

$$\text{但是 } \text{floor}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{floor}\left(\frac{1}{3}\right) + \text{floor}\left(\frac{1}{6}\right) = 0$$

註 Gauss 符號：有許多書用的記號是 $[\pi] = 3$, $[\sqrt{5}] = 2$ ；我覺得：這種記號太方便了！不應該使用！

註 Maple 的句式：當然就用 floor。

習題 1

對於 $m = 1, 2, \dots, 12$ ，計算 $g = \text{floor}(2.6 * m - 2.2)$ 。



$m =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$g =$	0	3	5	8	10	13	16	18	21	23	26	29

【語句的記號】

我們寫：

$x \in \mathbb{Z}$ ，表示「 x 是一個整數（interger）」。

$x \in \mathbb{N}$ ，表示「 x 是一個正（positive）整數」。

這兩句話可以如此否定：（我們寫：）

$x \notin \mathbb{Z}$ ，表示「 x 不是一個整數」。

$x \notin \mathbb{N}$ ，表示「 x 不是一個正整數」。

註 同樣地，後面我們用 $x \in \mathcal{P}$ ，表示「 x 是一個（正）質數（prime）」；用 $x \notin \mathcal{P}$ ，表示「 x 不是一個（正）質數」。

【自然數】

我用「自然數」，意思是「正整數」！非常明顯地「把零排除在外」！換句話說：我認為「零不是自然數」。

「零」是「很高級的觀念」！事實上到了第十世紀，歐洲人才學到零！

如何把零包含進來？我們寫：

$x \in \mathbb{N}_0$ ，表示「 x 是一個非負（non-negative）整數」。

在本書中，我們所用到的三、四個最重要的「集合」，就是整數系 $\mathbb{Z}$ 、自然數 $\mathbb{N}$ 、非負整數系 $\mathbb{Z}_+$ 、（正）質數系 $\mathcal{P}$ ：



簡單整數論

$$\mathbb{Z} = \{0, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, \text{ 不包括 } 0$$

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \text{ 包括 } 0$$

$$\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, \dots, (\text{一切質數})\}$$

例如：「 $a \in \mathbb{N}$ 」讀做「 a 是個自然數」。

【紐括號】

在以上已經出現紐括號，這表示「集合」，因此，我們寫：

$\{x, y, 5\} \subset \mathbb{Z}$ ，表示：「 $x, y, 5$ ，都是整數」。

$\{x^2 + 1, y^4 + 3, 5^2 - 6^2\} \not\subset \mathbb{N}$ ，因為：「其中有個 $5^2 - 6^2 = -11$ ，不是正整數」。

習題 2

下列句子正確否？

$$(1) (2.5 - 7.5) \in \mathbb{Z}; (2) 3 + 4 \in \mathbb{N}; (3) \frac{1}{2} \in \mathbb{N}_0$$

CHAPTER 2

[多角形數]

2.1

梯形原理

【梯形面積的公式】

（上下底的平均）乘以高

我們只要做這個梯形的拷貝（copy），轉了 180° ，（上下顛倒！）然後黏接起來，就變成面積加倍的平行四邊形；其邊長則為原梯形的上下底，高還是一樣！

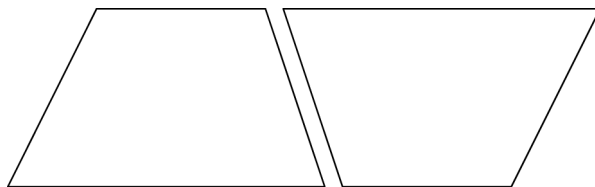


圖 2-1 梯形原理

【等差級數和的公式】

如果有一個等差數列：

$$a, a+d, a+2*d, a+3*d, \dots, a+(n-2)*d, a+(n-1)*d=l$$

這樣子一共有 n 項，領首是 a ，末尾是 l ；於是總和 =

$$S = \frac{n * (a+l)}{2} ; \text{或者} = \frac{n}{2} [2 * a + (n-1) * d]$$



如果我們寫兩遍，第一次是從 a 寫到 l ，再一遍卻是顛倒由 l 寫到 a ；



$(\rightarrow)$	$a,$	$a+d,$	$\cdots,$	$l-d,$	l
$(\leftarrow)$	$l,$	$l-d,$	$\cdots,$	$a+d,$	a
(上下和)	$a+l,$	$a+l,$	$\cdots,$	$a+l,$	$a+l$

因此 $2S = n * (a + l)$ 。

2.2 多角形數

【三角形數】

誰都知道： $1+2+3+\cdots+10=55$ ，這是所謂的「三角形數」第 10 階；Gauss 很小的時候已經知道：

$$1+2+3+\cdots+100=5050$$

這是所謂的「三角形數」第 100 階。

命名的來由是：畫一個（小）正三角形，邊長當做 1，有三個頂點。

現在固定了一個頂點，然後一步一步放大這個三角形，使邊長由 1 變成 2, 3, 4, ..., 9；每次，在邊上，與端點距離為 1, 2, 3, ...（整數）的點，我們都做上標記！在邊長為 9 的時候，一邊上共有 10 點，就說現在是第 10 階；那麼，「到此為止的有標記的點」總數 $55 = P_3(10)$ ，就是第 10 階的三角形數。

注意到：從第 $n-1$ 階到第 n 階，只是增加了一邊上的 n 個有標記的點！

因此

$$P_3(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

這裡當然用上等差級數和的公式。



習題 1 撞球檯上的整球框可以裝幾階的三角形數？

【工藝或勞作】用彈珠（或象棋子？）排三角形數！

【四角形數 = 正方數】

當然這就是：

$$1, 4, 9, \dots, P_4(n) = n^2, \dots \quad (2.1)$$

命名的來由是太顯然了：方格紙的左下角，最小格是一個（小）正四角形 = 正方形，邊長當做 1，有四個頂點。現在固定了左下角上的頂點，叫做原點；方格紙的最左邊一線，叫做 y 軸，方格紙的最下邊一線，叫做 x 軸，在這兩邊（兩個座標軸）上，與端點距離為 1, 2, 3, $\dots$ （整數）的點，我們都做上標記！這就是 x 座標與 y 座標。

現在我們把原始的最小格正方形，一步一步往右上放大，使邊長由 1 變成 2, 3, 4, $\dots$ ；在邊長為 $n-1$ 的時候，一邊上共有 n 點，就說現在是第 n 階；那麼，「到此為止的有標記的（格子）點」總數有如（2.1）式。

👉【工藝或勞作】用彈珠（或象棋子？）排正方形數！

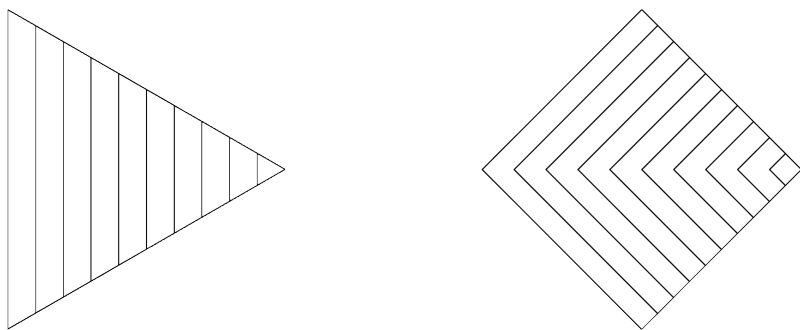


圖 2-2 三角形數與四角形數

【多角形數】

古人已經很著迷於「三角形數」、「四角形數」，與它們的推廣，也就是所謂「五角形數」、「六角形數」，等等「 k 角形數」。

畫一個（小）正 k 角形，邊長當做 1；有 k 個頂點。

現在固定了一個頂點，然後一步一步放大這個 k 角形，使邊長由 1 變成 2, 3, 4, $\dots, n-1$ ；（現在是第 n 階：一邊上共有 n 點；）每次，在邊上，與端點距離為整數的點，我們都做上標記！那麼，「到此為止的有標記的點」總數 $P_k(n)$ ，就是第 n 階的 k 角形數。

注意到：從第 $n-1$ 階到第 n 階，只是增加了 $k-2$ 個邊上的有標記的點，因此：公差是 $d=k-2$ ，首項是 1，末項是

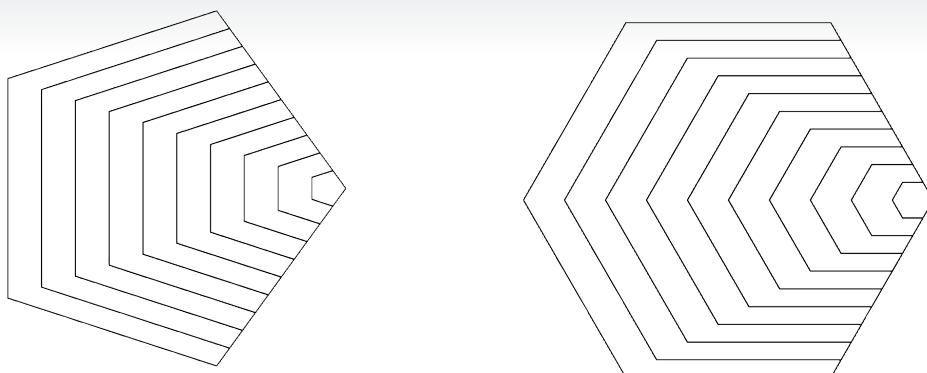


圖 2-3 五角形數與六角形數

$$l = 1 + (n - 1) * (k - 2)$$

$$P_k(n) = \frac{n}{2} (2 + (n - 1) * (k - 2)) = n + (k - 2) * \frac{n(n - 1)}{2}$$

階	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3 角數	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
4 角數	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
5 角數	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
6 角數	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
7 角數	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235
8 角數	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280

習題 2

每個六角形數等於其階數加上低一階的三角形數的四倍。



$$P_6(n) = n + 4 * \frac{n(n - 1)}{2}。$$

習題 3

每個八角形數等於其階數加上低一階的三角形數的六倍。



$$P_8(n) = n + 6 * \frac{n(n - 1)}{2}。$$