Chapter 1

複習微積

本書的目的是：拿我們學過的微積分法做對照，發展一套差和分法。因此必須先複習微積分。

§A1 微積分學根本定理

（初等）微積分（calculus），只是「（微導與積分）兩個定義」與「一（兩）個定理」而已！

如果有一個質點，在一條直線上運動，它在時刻 t 的位置是 $x=f(t)$，速度是 $v=g(t)$，那麼，

微導，指的是：由位置函數 $x=f(t)$，求速度函數 $g(t)$。

積分，指的是：由速度函數 $v=g(t)$，求總路程 $f(b)-f(a)$。

一個定理，指的是：這兩者是一致的（consistent）！

§A1.1 微導

§A1.11 連續性

定義在區間 I 上的函數 f 是連續的：$f\in Cont\,(I)=Cont^0\,(I)$，意思是：

$$\forall t\in I，\lim_{\tau\to t}f(\tau)=f(t) \tag{1a}$$

以下總是討論：定義在區間 I 上的連續函數 $f, g,\cdots \in Cont(I)$。

§A1.12 導微

定義在開區間 I 上的連續函數 $f(t)$ 對自變數 t 的導微函數 $(Df)(t):=\dfrac{df(t)}{dt}$ 是：

$$\frac{df(t)}{dt}=\lim\left(\frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0}: t_0\uparrow t, t_1\downarrow t\right) \tag{1b}$$

註 此地 t 是固定的！t_0, t_1 才是變數！如果只是固定一點來討論，那就是函數在該點的微分商，於是我們說函數在該點可以導微。我們通常假設函數是逐點可微導的！如果導微函數 $Df\in Cont(I)$ 也是連續的，我們就記做：$f\in Cont^1(I)$。

§A1.13 高階導微

依此遞迴：若 $Df\in Cont^k(I)$，則 $f\in Cont^{k+1}(I)$。

§A1.14 單側導數

我們也可以定義：

$$\begin{cases} \dfrac{df(t+)}{dt} = \lim\limits_{\tau \downarrow t} \dfrac{f(\tau) - f(t)}{\tau - t} \\ \dfrac{df(t-)}{dt} = \lim\limits_{\tau \uparrow t} \dfrac{f(\tau) - f(t)}{\tau - t} \end{cases} \tag{1c}$$

現在的定義，只有一個自變數，這比較方便，但效果相同的。

【**補題**】假定函數 f（於 t）是連續的，則：f（於 t）是可微的充要條件是：它是兩側可導微的，且兩側導數相同！

§A1.15 閉區間上的可導性

若定義域 $Dom\,(f)$ 為閉區間 $[a..b]$，則：

- f 於內點 $t \in (a..b)$ 之可微性，是指平常的（兩側）可微性。
- f 於端點 $t = a$，或 b 之可微性，是指單側可微。

§A1.16 無限小差分

這個記號

$$\frac{dv}{du} = \lim \frac{\Delta v}{\Delta u}$$

是 Leibniz 發明的！當然 du 不是 d 乘 u，不能消去 d！這也是助憶術：

無限小的差分叫做微分（differential）；「差分趨近 0 時」，即「無限小差分」，其商為「微分商」。

§A1.2 （定）積分

§A1.21 分割

已知一個閉區間 $I = [a..b]$，則：

$$\pi = (t_0, t_1, t_2, \cdots, t_{N-1}, t_N)$$

稱為 I 的一個分割，如果

$$t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b$$

此分割的粗糙度

$$\|\pi\| := \max(|t_j - t_{j-1}| : j = 1, 2, \cdots, N) \tag{1d}$$

§A1.22 取樣

有限數列

$$\sigma = (\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_N)$$

稱為是臣附於（subordinate to）分割π的一個取樣（sampling），如果

$$(\forall k=1, 2, \cdots, N)\ \tau_k \in \Delta_k = [t_{k-1}..t_k] \tag{1e}$$

§A1.23 Riemann 和

已知函數$g(t)$於區間$I=[a..b]$上；而(π, σ)是I的一個分割取樣，則$g(t)$對於此分割取樣的 Riemann 和（Riemann sun）$S(g; \pi, \sigma)$，是

$$S(g; \pi, \sigma) \coloneqq \sum_k g(\tau_k) * (t_k - t_{k-1}) \tag{1f}$$

§A1.24 Riemann 積分

函數$g(t)$於區間$I=[a..b]$上的（定 definite）積分（integral）是：

$$\int_a^b g(t)\,dt = \int_I g(t)\,dt = \lim\,(S(g; \pi, \sigma): \|\pi\| \downarrow 0) \tag{1g}$$

極限存在，就說g是（Riemann）可積分的！有界閉區間上的連續函數都是可積分的！

例　定和分與定積分：

函數$gp(x)=x^2*\sin\left(\frac{x}{4}\right)+2.1*x+3.4$的積分$\int_1^7 gp(x)\,dx$的 Riemann 和：（等差分割，分成 12 段，左端採樣）

$$\Delta x * \sum_{j=1}^{n} gp\,(a+(j-1)*\Delta x)\text{；}a=1, b=7; n=12; \Delta x=\frac{b-a}{n}$$

§A1.25 積分上下界

記號$\int_I g$非常簡潔地表達出來：積分是兩變元的映射，是牽涉到被積分函數（integrand）g以及積分範圍（integration domain）I。

先說後者；例如說：$\int_{\left[\frac{\pi}{3}..\pi\right]}\sin=\frac{3}{2}$。現在慣常地寫成$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin=\frac{3}{2}$，它其實有一個壞處：積分變得好像是三變元的映射，是牽涉到被積分函數 sin，以及積分下界$\frac{\pi}{3}$，積分上界π。

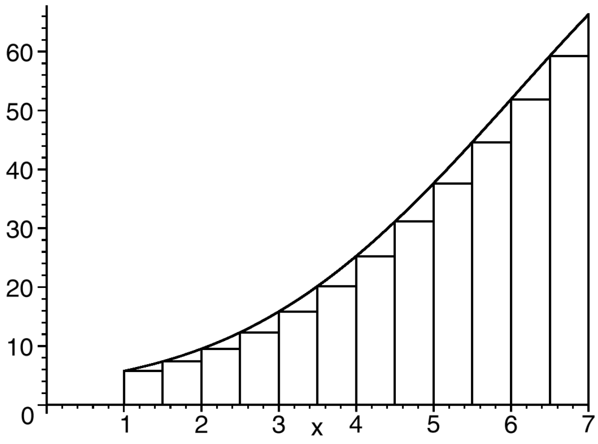

圖 A.i：定積分 $\int_1^7 (x^2 * \sin\left(\frac{x}{4}\right) + 2.1 * x + 3.4)\, dx$

這樣子的看法其實只對一維積分行得通！不過，在一維積分的情形，它是「非常行得通」！因為，對於 $a>b$，我們要定義：

$$\int_a^b g := -\int_b^a g \qquad (1h)$$

§A1.26　疊合原理

我們最後這個定義的目的是：不用煩惱 a, b, c 之間的大小關係！就可以簡單地寫下（積分對於積分範圍的疊合原理）：

$$\int_a^b g + \int_b^c g = \int_a^c g \qquad (1i)$$

註 對於變數代換，積分上下界的記號也是很有用的！

§A1.27　啞巴變數

其次，把積分變數也寫出來，本來是不必要的！（$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin$ 當然比 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin\theta d\theta$ 簡單！）

但是，我們經常遇到的被積分函數幾乎都是無名（unnamed）函數，而非如 sin, cos, log, exp 這樣子簡單的有名（named）函數！其實，在「數學國」，連「平方函數」、「立方函數」，都沒有名字！都是以「啞巴變數」表達的；所以這種寫法

$$\int_1^4 x^2\, dx = 21$$

簡直是必要的！而且對於變數代換，反倒方便！

§A1.28 Leibniz 萬歲

當然，這樣子的記號，也是助憶術：

$$\begin{aligned} \int &\leftarrow \Sigma \\ g(x) &\leftarrow g(\xi) \\ dx &\leftarrow \Delta x_k = x_k - x_{x-1} \end{aligned} \tag{1j}$$

§A1.29 積分只是連續的和

對於有窮的和式，有一些周知的命題，利用積分作為 Riemann 和的極限，就可以證明對應的命題，而把和改為積分！

【Cauchy-Schwartz 不等式】

$$|\Sigma x_j y_j|^2 \leq (\Sigma|x_j|^2)(\Sigma_j|y_j|^2)$$

$$|\int_a^b f(x)g(x)dx|^2 \leq (\int_a^b |f(x)|^2 dx)(\int_a^b |g(x)|^2 dx) \tag{1k}$$

【Hölder 不等式】若是 $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \cdots, \alpha_m > 0$，則

$$\Sigma_{j=1}^n \prod_{i=1}^m |x_{ij}|^{\alpha_i} \leq \prod_i (\Sigma_j |x_{ij}|)^{\alpha_i}$$

$$\int_a^b \prod_{i=1}^m |f_i(x)|^{\alpha_i} dx \leq \prod_i (\int_a^b |f_i(x)| dx)^{\alpha_i} \tag{1l}$$

【高階平均不等式】若 $\alpha > \beta$，則

$$\left(\frac{1}{n}\Sigma_{j=1}^n |x_j|^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} \leq \left(\frac{1}{n}\Sigma_{j=1}^n |x_j|^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|^\beta dx\right)^{\frac{1}{\beta}} \leq \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{1m}$$

【算幾平均不等式】$\alpha = 1 > \beta = 0$ 的極限情形，就是

$$\left(\frac{1}{n}\Sigma_{j=1}^n \log(|x_j|) \leq \log\left(\frac{1}{n}\Sigma_{j=1}^n |x_j|\right)\right.$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \log(|f(x)|)dx \leq \log\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|dx\right) \tag{§A1n}$$

註 當然這個命題只是說明對數函數是凸函數！

§A1.3 根本定理

§A1.31 微積分學的根本定理

$$\begin{cases}(Df=g) & \Rightarrow (\int_{[a..b]} g=f(b)-f(a)) \\ (\int_{[a..t]} g=u(t)) & \Rightarrow (Du=g(t))\end{cases} \tag{1o}$$

§A1.32 定命性原理

如果給我們速度函數 $v=g(t)$，又給我們某一瞬（初始時刻，$t=0$）的位置 $x=f_0$ ，那麼整個運動 $x=f(t)$，我們已經可以確定了！因為：

$$f(t)=f(0)+\int_0^t g(\tau)\,d\tau \tag{1p}$$

§A1.33 自律性原理

我們現在敘述一個，在物理學上更深刻的定理，想像我們完全懂得路況，知道了：在任何地點 x 處，路面好不好，車子擠不擠，等等；所以我們知道了：速度 $v=v(x)$ 是 x 的函數，而不是做為時刻 t 的函數；這時候，若我們又知道初始位置 $x(0)=x_0$，那麼整個運動也就完全決定了！這就是自律性原理：

如果 $v\in Cont^1(I),\ 0\in I$（開區間），則微分方程

$$\frac{dx}{dt}=v(x(t))，x(0)=x_0$$

的解答，存在而且唯一（在小小的開區間 $(-\epsilon..\epsilon)\subset I$ 上）！

註 這是微分方程中，最重要的定理！

當然路況本身可以隨時改變，不必是定常的，（那麼 $v=v(x,t)$）這時候這個原理仍然成立！

在物理學中，位置不能限定在一條直線上，這就是說，我們應該考慮：x, v 都有好幾個座標（或成分），平面的運動，要兩個；立體空間的運動，要三個；但是以數學的觀點，不論「維數」（舊譯「度」）是多少，本質上都一樣！我們同樣有「定命性原理」以及「自律性原理」。

§A2 由導函數看原函數

§A2.1 函數的單調性

以下，設f是區間I上的函數。

§A2.11 增減性

考慮兩種性質：

$$\spadesuit_{+}：(t_1 < t_2) \Rightarrow (f(t_1) \leq f(t_2))$$
$$\spadesuit_{-}：(t_1 < t_2) \Rightarrow (f(t_1) \geq f(t_2))$$

這分別稱做（廣義的）遞增（increasing）或遞減（decreasing）；兩者合稱單調（monotonic）；若廣義的大小號改為狹義的，就說是狹義遞增或遞減；合稱狹義單調！

§A2.12 極值點

假設$t_0 \in I$，考慮兩種性質：

$$\heartsuit_{+}：(t \neq t_0, t \in I) \Rightarrow (f(t_0) \geq f(t))$$
$$\heartsuit_{-}：(t \neq t_0, t \in I) \Rightarrow (f(t_0) \leq f(t))$$

這分別說成：t_0是函數f於I上的（廣義的）極大點（maximum point）或極小點（minimum point）；兩者合稱極值點（extremum point）；函數值$f(t_0)$稱做（廣義的）極大或極小值，合稱極值（extremum）。

將廣義的不等號改為狹義的，稱呼也跟著改！

§A2.13 局部極值

假設$t_0 \in I$，如果有存在一個$\epsilon > 0$，使得

$$(t \neq t_0, t \in I，|t - t_0| < \epsilon) \Rightarrow (f(t_0) > f(t))$$

我們就說：t_0是函數f於I上的（狹義的）局部的（local）極大點；函數值$f(t_0)$稱做（狹義的）局部極大值；其他的類似的概念也很容易！

§A2.14 單調變化定理

若：對一切$t \in I = (a..b)$，$Df(t) \geq 0$，則：f於I上遞增。

狹義性，或者遞減性，也有類似的定理！

§A2.15 Fermat 定理

若：f 在$[a..b]$連續，且在$\tau \in (a..b)$得極值，則：$Df(\tau)=0$。

§A2.16 極值的二階判定

設：I 為開區間，$f \in Cont^2(I)$，$Df(c)=0$，$D^2f(c)>0$，則：c 為局部狹義極小點！反之，若c 為 f 之局部狹義極小點，則$D^2f(c) \geq 0$。

§A2.2 平均變化率定理

§A2.21 Rolle 定理

函數 h 在$[a..b]$連續，在$(a..b)$可微，且 $h(a)=h(b)$，必有某個$\tau \in (a..b)$，使得：$Dh(\tau)=0$。

§A2.22 平均變率定理

若：f在$[a..b]$連續，且在$(a..b)$可微分，則：在$(a..b)$內，有個τ，使得：

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=Df(\tau) \tag{2a}$$

§A2.23 推廣的平均變率定理

若：函數f, g 在$[a..b]$連續，在$(a..b)$可微；且 $Dg(x) \neq 0$，則：在$(a..b)$內，有個ξ，使得：

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{Df(\xi)}{Dg(\xi)} \tag{2b}$$

§A2.24 L'Hospital 規則

設f, g 在點 a 的附近可以導微，再設 $f(a)=0=g(a)$；此時，若

$$\lim_{t\to a}\frac{Df(t)}{Dg(t)}=k$$

即

$$\lim_{t\to a}\frac{f(t)}{g(t)}=k$$

§A2.3 凸函數

§A2.31 凸性

設$f \in Cont(I)$，則「在I上，函數f（或其圖形）為凸」的意思是：對於任何一段子區間$J=[t_0..t_1]\subset I$，曲線$y=f(x)$的割點$P_j=(t_j, f(t_j))$的連接線段（亦即

割線段）P_0P_1，在這個範圍內，都是在函數圖形的上方！

$$(0<p<1, q=1-p)\Rightarrow f(p*t_0+q*t_1)\le p*f(t_0)+q*f(t_1) \tag{2c}$$

註 也可以考慮狹義的概念！

§A2.32 凸性與導函數

設 f 在區間 I 上可導微，$\xi\in I$，則在點ξ處，函數f（或其圖形）「為凸」的意思是指：函數圖形在點ξ的附近小範圍內，都在過點的切線之上方；亦即存在點ξ的近旁，$(\xi-\epsilon..\xi+\epsilon)$，使得：對這範圍內的點$x$，都有：

$$f(x)\ge f(\xi)+f'(\xi)\,(x-\xi)$$

換句話說：函數圖形的一段弧（在小範圍內）都在過此點的切線之上方。

§A2.33 凸性的二階判定

設f為定義在區間I上的可導微函數，且導函數f'遞增，則f在I上為凸；特別在f二階可導微時，若$f''\ge 0$，則f在I上為凸。

§A2.34 對數凸性

設$f\in Cont(I), f>0$，則 $\log f$的凸性就稱做f的對數凸性；換句話說：

$$(0<p<1, q=1-p)\Rightarrow f(p*t_0+q*t_1)\le f(t_0)^p*f(t_1)^q \tag{2d}$$

§A2.4 函數的高階的行為

§A2.41 Taylor 展式及剩餘項

函數 f 在點$x=a$的k次 Taylor 展式以及$k+1$ 階剩餘項，分別為

$$Taylor\,(f;k,x=a)=\sum_{j=0}^{k}\frac{D^jf(a)}{!(j)}(x-a)^j$$
$$R_{k+1}(x;a)=f(x)-Taylor\,(f;k,x=a) \tag{2e}$$

§A2.42 高階的平均變率定理

若：f在$[a..b]$上C^{k-1}連續，$D^{k-1}f$在$(a..b)$可微；則：在$(a..b)$內，有個ξ，使得餘項

$$R_k(b;a)=\begin{cases}\dfrac{D^kf(\xi)}{!(k)}(b-a)^k\text{（}Lagrange\text{ 型）}\\ \text{（或）}\dfrac{D^kf(\xi)}{!(k-1)}(b-a)(b-\xi)^{k-1}\text{（}Cauchy\text{ 型）}\end{cases} \tag{2f}$$