第 1 章

函數與函數圖形

1.1 實數系

1.1.1. 實數系大要

本課程所討論的都是限於實數系，因此在課程一開始我們就先對實數系作一簡單的分類。

首先從我們最熟悉的是整數（Integer）開始，像－3，－2，－1，0，1，2，3…等都是整數，其中0，1，2，3…是非負整數（Non-negative integer），而…－3，－2，－1稱為負整數（Negative Integer）。通常，整數所成之集合用I表示。

再往上走就是有理數（Rational Numbers），有理數是一種可用 q/p，p,q 為整數之所有數所成之集合，但 $p\neq 0$，否則 q/p 沒有意義。有理數所成之集合通常可用 Q 表示，像2/3、－31/256等都是有理數，當然所有的整數也都是有理數。循環小數是另一個重要的有理數分支。相對於有理數，像 $\sqrt{3}$、$\sqrt{3}-\sqrt{2}$、π……等這類數因無法用 q/p（p,q 為整數，$p\neq 0$）表示，稱為無理數（Irrational Numbers）。

實數系之最高層次為實數，所有的有理數、無理數都是實數。

例 1. 試證 $\sqrt{2}$ 為無理數。

解 利用反證法，設 $\sqrt{2}$ 為有理數，則 $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$，p,q 為互質整數

$2=\dfrac{p^2}{q^2}$，$p^2=2q^2\Rightarrow p^2$ 為偶數 $\Rightarrow p$ 為偶數

令 $p=2m$ 並代入 $p^2=2q^2$ 得 $4m^2=2q^2$

$\therefore q^2=2m^2\Rightarrow q$ 為偶數，結果 p,q 均為偶數，因此，p,q 至少

有公因數 2，此與 p,q 互質之假設矛盾

$\therefore \sqrt{2}$ 為無理數

定理 方程式 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$，$a_0, a_1, \cdots, a_n$ 均為整數，且 $a_0\neq 0$ 及 $a_n\neq 0$，若 $r=\dfrac{p}{q}$ 為其有理根，則 q 整除 a_n，p 整除 a_0。

證明

設 $r=\dfrac{p}{q}$ 為 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 之根，則

$a_n(\dfrac{p}{q})^n+a_{n-1}(\dfrac{p}{q})^{n-1}+\cdots+a_1(\dfrac{p}{q})+a_0=0$

即

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\cdots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0 \qquad (1)$$

$$a_np^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}q+\cdots+a_1q^{n-1}=-\frac{a_0q^n}{p} \qquad (2)$$

a_1，$a_2\cdots a_n$ 均為整數，p,q 亦為整數，故(2)之左式必為整數

$\because \dfrac{a_0q^n}{p}$ 為整數，p,q 互質，p 不能整除 q^n，故 p 必能整除 a_0

由(1)，$a_{n-1}p^{n-1}q+\cdots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=-a_np^n$

$\therefore a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1pq^{n-2}+a_0q^{n-1}=\dfrac{-a_np^n}{q}$

同理可推知：q 必能整除 a_n

上述定理在應用上，必須先構建一個整數為係數之方程式。

例 2. 用上一定理證(1) $\sqrt{2}$ 為無理數　(2) $1+\sqrt{2}$ 為無理數。

解 (1) $x=\sqrt{2}$，二邊平方得 $x^2-2=0$，2 之因數有 1, 2　故可能之有理根為 ±1，±2，但 ±1，±2 均不滿足 $x^2-2=0$

從而$\sqrt{2}$為無理數

(2) $x=1+\sqrt{2}$，$x-1=\sqrt{2}$　兩邊平方　$x^2-2x+1=2$

$\therefore x^2-2x-1=0$，可能之有理根為 ±1，但 ±1 不能滿足 $x^2-2x-1=0$

從而 $1+\sqrt{2}$ 為無理數

實數系有許多基本性質，想必讀者都很熟悉，現在我們把它表列如下：

交換律：

$a+b=b+a \quad ab=ba$

結合律：

$(a+b)+c=a+(b+c) \qquad abc=(ab)c=a(bc)$

分配律：

$a(b+c)=ab+ac$

冪法則：

$x^1=x,\ x^2=x\cdot x,\ \cdots,\ x^n=\underbrace{x\cdot x\cdots\cdots x}_{n\text{ 個}}$

定義 對任一實數 $x\neq 0$ ，定義

$$x^0=1,\ x^{-1}=\frac{1}{x},\ x^{-2}=\frac{1}{x^2},\ \cdots,\ x^{-n}=\frac{1}{x^n}$$

指數法則：

(a) $x^n\cdot x^m=x^{n+m}$　(b) $(x^n)^m=x^{nm}$

(c) $(ax)^n=a^n\cdot x^n$　(d) $\left(\dfrac{x}{a}\right)^n=\dfrac{x^n}{a^n}\quad a\neq 0$

(e) $\dfrac{x^n}{x^m}=x^{n-m}\quad x\neq 0$

(f) $x^{1/q}=\sqrt[q]{x}\quad x^{p/q}=(x^{1/q})^p=(\sqrt[q]{x})^p$ 或 $x^{p/q}=(x^p)^{1/q}=\sqrt[q]{x^p}$

1.1.2　不等式

不等式之符號有<，≤，>，≥，帶有一個或一個以上不等式符號之數學命題即為不等式。

我們對如何求得一個不等式之解集合感到興趣，因為它對微積分之計算上有其功能。

例 1. 解(1) $3x+2\geq 5x+4$　(2) $3x+2>5x+4$

解　(1) $3x+2\geq 5x+4$

$\therefore 3x-5x\geq -2+4 \quad \Rightarrow -2x\geq 2 \quad \therefore x\leq -1$

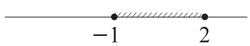
(2) $3x+2>5x+4$

$\therefore 3x-5x>-2+4 \quad \Rightarrow -2x>2 \quad \therefore x<-1$

例 2. 解(1) $x^2-x-2\leq 0$　(2) $x^2-x-2\geq 0$

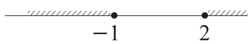
(3) $x(x^2-x-2)\geq 0$　(4) $\dfrac{x(x^2-x-2)}{x-3}\leq 0$

解　(1) $x^2-x-2=(x-2)(x+1)\leq 0$



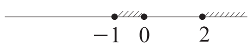
$\therefore$ 解為 $-1\leq x\leq 2$

(2) $x^2-x-2=(x-2)(x+1)\geq 0$



$\therefore$ 解為 $x\geq 2$ 或 $x\leq -1$

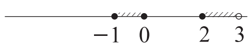
(3) $x(x^2-x-2)=x(x-2)(x+1)\geq 0$



$\therefore$ 解為 $0\geq x\geq -1$ 或 $x\geq 2$

(4) $\dfrac{x(x^2-x-2)}{x-3}\leq 0$ 相當於 $x(x^2-x-2)(x-3)\leq 0$

即 $x(x-2)(x+1)(x-3)\leq 0$



其解為 $3\geq x\geq 2$ 或 $0\geq x\geq -1$

但 $x=3$ 不能滿足 $\dfrac{x(x^2-x-2)}{x-3}\leq 0$

$$\therefore \frac{x(x^2-x-2)}{x-3} \leq 0 \text{ 之解為}$$

$$3 > x \geq 2 \text{ 或 } 0 \geq x \geq -1$$

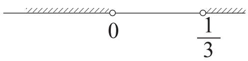
例 3. 求(1) $\frac{1}{x}<3$ (2) $\frac{3}{x} \geq -4$ (3) $\frac{2}{x-1}>5$

解 (1)許多讀者在解 $\frac{1}{x}<3$ 時，誤將 x 乘 $\frac{1}{x}<3$ 之二邊而得到

$1<3x$

$\therefore x>\frac{1}{3}$ ，其實這是錯的，因為 x 可能是負的，正確解法

應為：$\frac{1}{x}<3$

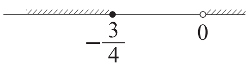


$\therefore \frac{1}{x}-3=\frac{1-3x}{x}<0$

$x(1-3x)<0$ ，$x(3x-1)>0$

$\therefore x>\frac{1}{3}$ 或 $x<0$

(2) $\frac{3}{x} \geq -4$, $\frac{3}{x}+4=\frac{3+4x}{x} \geq 0$



又 $x(3+4x) \geq 0$ 之解為

$x \geq 0$ 或 $x \leq -\frac{3}{4}$

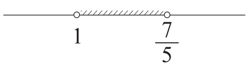
但 $x \neq 0$

$\therefore \frac{3}{x} \geq -4$ 之解為 $x>0$ 或 $x \leq -\frac{3}{4}$

(3) $\frac{2}{x-1}>5$ $\quad \therefore \frac{2}{x-1}-5=\frac{2-5(x-1)}{x-1}=\frac{7-5x}{x-1}>0$

又 $(7-5x)(x-1)=-(5x-7)(x-1)>0$

$\Rightarrow (x-1)(5x-7)<0$



得 $1<x<\frac{7}{5}$

$\therefore \frac{2}{x-1}>5$ 之解為 $1<x<\frac{7}{5}$

1.1.3 絕對值

定義 若 x 為實數，則 x 之絕對值記做 $|x|$，定義為

$$|x| = \begin{cases} x，x \geq 0 \\ -x，x < 0 \end{cases}$$

例如：$|-3| = 3$，$|3| = 3$，$|1+\sqrt{3}| = 1+\sqrt{3}$

$|1-\sqrt{5}| = -(1-\sqrt{5}) = \sqrt{5}-1$

習慣上，規定 $\sqrt{x^2} = |x|$

1.1.4 絕對值之性質

定理 a, x 均為實數，則：

(1) $|x-a| = |a-x|$ (2) $|ax| = |a||x|$

(3) $-|x| \leq x \leq |x|$ (4) $\left|\dfrac{x}{a}\right| = \dfrac{|x|}{|a|}$，但 $a \neq 0$

(5) $|x^n| = |x|^n$

上式之(3)是個簡單而重要之結果，許多絕對值問題都用得到它。

基本上，若 $a>0$ 則：

$$\begin{cases} |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a & |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \\ |x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ 或 } x < -a & |x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \text{ 或 } x \leq -a \end{cases}$$

例 4. 求滿足(1) $|x-1|\le 2$ (2) $|x-1|>1$

(3) $|x-1|\le -2$ (4) $|x-1|=2$ 之解

解 (1) $|x-1|\le 2 \Leftrightarrow -2\le x-1\le 2 \quad \therefore -1\le x\le 3$

(2) $|x-1|>1 \Leftrightarrow x-1>1$ 或 $x-1<-1$，即 $x>2$ 或 $x<0$

(3) $\because |x-1|\ge 0 \quad \therefore |x-1|\le -2$ 為不可能

即不存在一個實數滿足 $|x-1|\le -2$

(4) $|x-1|=2 \quad \therefore x-1=\pm 2$

得 $x-1=2$ 或 $x-1=-2$ 即 $x=3$ 或 -1

例 5. 求 δ（δ 與 ε 有關）

(1) $|x-3|<\delta \Rightarrow |3x-9|<\varepsilon$

(2) $|x+5|<\delta \Rightarrow |2x+10|<\varepsilon$

(3) $|x-6|<\delta \Rightarrow \left|\frac{x}{3}-2\right|<\varepsilon$

解 (1) $|3x-9|<\varepsilon \Leftrightarrow 3|x-3|<\varepsilon$

$$\Leftrightarrow |x-3|<\frac{\varepsilon}{3} \quad \therefore \text{取 } \delta=\frac{\varepsilon}{3}$$

(2) $|2x+10|<\varepsilon \Leftrightarrow 2|x+5|<\varepsilon$

$$\Leftrightarrow |x+5|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \therefore \text{取 } \delta=\frac{\varepsilon}{2}$$

(3) $\left|\frac{x}{3}-2\right|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-6|<3\varepsilon \quad \therefore$ 取 $\delta=3\varepsilon$

例 6. 解 $|x-2|<2|x-3|$

解 $|x-2|<2|x-3| \Leftrightarrow |x-2|<|2x-6|$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2<(2x-6)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+4<4x^2-24x+36$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-20x+32<0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(3x-8)<0$$

$\therefore \frac{8}{3} < x < 4$

我們習慣上用下列區間符號：

$[a,b]$：$a \leq x \leq b$　　$(a,b]$：$a < x \leq b$

$[a,b)$：$a \leq x < b$　　(a,b)：$a < x < b$

因此例6.之解也可寫成$(\frac{8}{3},4)$

定理 （三角不等式）a, b為實數，則

$|a+b| \leq |a| + |b|$

證明

$|a| \geq a \geq -|a|$，$|b| \geq b \geq -|b|$

$\therefore |a| + |b| \geq a+b \geq -(|a| + |b|)$

即$|a| + |b| \geq |a+b|$

（利用$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$之結果）

例 7. 利用三角不等式證明

(1) $|a-b| \leq |a| + |b|$

(2) $|a-b| \geq |a| - |b|$

解 (1) $|a-b| = |a+(-b)|$

$\leq |a| + |-b| = |a| + |b|$

(2) $|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b| + |b|$

$\therefore |a-b| \geq |a| - |b|$

例 8. 若 $|x-a|<\dfrac{1}{3}$，$|y-a|<\dfrac{1}{3}$，試證 $|x-y|<\dfrac{2}{3}$。

解 $|x-y|=|(x-a)+(a-y)|\leq|x-a|+|y-a|$

$<\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

例 9. 若 x,y 為實數，試證 $|x|<|y|\Leftrightarrow x^2<y^2$。

解 「$\Rightarrow$」即 $|x|<|y|\Rightarrow x^2>y^2$：

$$
\begin{aligned}
|x|<|y| &\Rightarrow |x|\ |x|<|y|\ |y| \\
&\Rightarrow |x|^2<|y|^2 \\
&\Rightarrow x^2<y^2
\end{aligned}
$$

「$\Leftarrow$」即 $x^2<y^2\Rightarrow|x|<|y|$：

$$
\begin{aligned}
x^2<y^2 &\Rightarrow |x|^2<|y|^2 \\
&\Rightarrow |x|^2-|y|^2<0 \\
&\Rightarrow (|x|+|y|)(|x|-|y|)<0 \\
&\Rightarrow |x|-|y|<0 \\
&\Rightarrow |x|<|y|
\end{aligned}
$$

例 10. 若 $|x-2|<\dfrac{1}{100}$，試證 $|x^2-4|<\dfrac{1}{10}$。

解 $|x^2-4|=|x-2|\ |x+2|<\dfrac{|x+2|}{100}$

又 $|x-2|<\dfrac{1}{100}$

$\therefore -\dfrac{1}{100}<x-2<\dfrac{1}{100}\Rightarrow 4-\dfrac{1}{100}<x+2<\dfrac{1}{100}+4$

即 $|x+2|<4+\dfrac{1}{100}<5$

$\therefore |x^2-4|<\dfrac{|x+2|}{100}<\dfrac{5}{100}=\dfrac{1}{20}<\dfrac{1}{10}$