第 1 章

函數與函數圖形

1.1　實數系

在本簡易微積分課程裡所討論的都是限於實數系，因此在課程一開始我們就先對數系作一簡單的分類。

最簡單也是我們做熟悉的是整數（integer），像－ 3，－ 2，－ 1，0，1，2，3…等都是整數，其中 0，1，2，3…是非負整數（non-negative integer），而…－3，－2，－1 稱為負整數（negative integer）。通常，整數所成之集合用 I 表示。

再往上走就是有理數（rational numbers），有理數是一種可用 q/p，p,q 為整數之所有數所成之集合，但 $p\neq 0$，否則 q/p 沒有意義。有理數所成之集合通常可用 Q 表示，像 2/3、－ 31/256 等都是有理數，當然所有的整數也都是有理數。循環小數是另一個重要的有理數分支。相對於有理數，像 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 、 π ……等這類數因無法用 q/p （ p,q 為整數， $p\neq 0$ ）表示，稱為無理數。

實數系之最高層次為實數，所有的有理數、無理數都是實數。

隨堂演練

判斷 $1+\sqrt{3}$, 0.375, $\sqrt{4}$, － 4/2 可歸類於下列那個數系？（複選）

	非負整數	負整數	有理數	無理數	實數
$1+\sqrt{3}$					
0.375					
$\sqrt{4}$					
－ 4/2					

1.1.1 實數系的性質

實數系有許多基本性質，想必讀者都很熟悉，現在我們把它表列如下：

交換律：

$a+b=b+a \quad ab=ba$

結合律：

$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c) \quad abc=(ab)c=a(bc)$

分配律：

$a(b+c)=ab+ac$

除法法則：

$$x^1=x,\ x^2=x\cdot x, \cdots, x^n=\underbrace{x\cdot x\cdots\cdots x}_{n\text{ 個}}$$

定義 對任一實數 $x\neq 0$ ，定義

$$x^0=1,\ x^{-1}=\frac{1}{x},\ x^{-2}=\frac{1}{x^2}, \cdots, x^{-n}=\frac{1}{x^n}$$

指數法則：

(a) $x^n\cdot x^m=x^{n+m}$ (b) $(x^n)^m=x^{nm}$

(c) $(ax)^n=a^n\cdot x^n$ (d) $\left(\frac{x}{a}\right)^n=\frac{x^n}{a^n} \quad a\neq 0$

(e) $\frac{x^n}{x^m}=x^{n-m} \quad x\neq 0$

(f) $x^{1/q}=\sqrt[q]{x} \quad x^{p/q}=(x^{1/q})^p=(\sqrt[q]{x})^p$ 或 $x^{p/q}=(x^p)^{1/q}=\sqrt[q]{x^p}$

1.1.2 不等式

不等式之符號有<，≤，>，≥，帶有一個或一個以上不等式符號之數學命題即為不等式。

我們對如何求得一個不等式之解集合感到興趣，因為它對微積分之計算上有其功能。

例 1. 解(1) $3x+2\geq 5x+4$ (2) $3x+2>5x+4$

解 (1) $3x+2\geq 5x+4$

$\therefore 3x-5x\geq -2+4 \quad \Rightarrow -2x\geq 2 \quad \therefore x\leq -1$

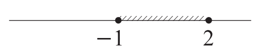
(2) $3x+2>5x+4$

$\therefore 3x-5x>-2+4 \quad \Rightarrow -2x>2 \quad \therefore x<-1$

例 2. 解(1) $x^2-x-2\leq 0$ (2) $x^2-x-2\geq 0$

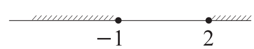
(3) $x(x^2-x-2)\geq 0$ (4) $\dfrac{x(x^2-x-2)}{x-3}\leq 0$

解 (1) $x^2-x-2=(x-2)(x+1)\leq 0$



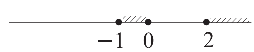
$\therefore$ 解為 $-1\leq x\leq 2$

(2) $x^2-x-2=(x-2)(x+1)\geq 0$



$\therefore$ 解為 $x\geq 2$ 或 $x\leq -1$

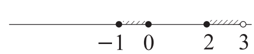
(3) $x(x^2-x-2)=x(x-2)(x+1)\geq 0$



$\therefore$ 解為 $0\geq x\geq -1$ 或 $x\geq 2$

(4) $\dfrac{x(x^2-x-2)}{x-3}\leq 0$ 相當於 $x(x^2-x-2)(x-3)\leq 0$

即 $x(x-2)(x+1)(x-3)\leq 0$，$x\neq 3$



其解為 $3>x\geq 2$ 或 $0\geq x\geq -1$

$\therefore \dfrac{x(x^2 - x - 2)}{x - 3} \leq 0$ 之解為

$3 > x \geq 2$ 或 $0 \geq x \geq -1$

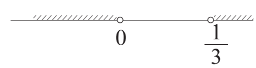
隨堂演練

驗證 $\dfrac{x - 2}{x(x + 1)} < 0$ 之解集為 $0 < x < 2,\ x < -1$

例 3. 求(1) $\dfrac{1}{x} < 3$　(2) $\dfrac{3}{x} \geq -4$　(3) $\dfrac{2}{x - 1} > 5$

解 (1)有許多讀者在解 $\dfrac{1}{x} < 3$ 時，誤將 x 乘 $\dfrac{1}{x} < 3$ 之二邊而得到 $1 < 3x$

$\therefore x > \dfrac{1}{3}$ ，其實這是錯的，因為 x 可能是負的，正確解法應為：$\dfrac{1}{x} < 3$

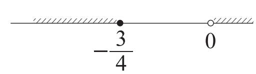


$\therefore \dfrac{1}{x} - 3 = \dfrac{1 - 3x}{x} < 0$

$x(1 - 3x) < 0$ ，$x(3x - 1) > 0$

$\therefore x > \dfrac{1}{3}$ 或 $x < 0$

(2) $\dfrac{3}{x} \geq -4,\ \dfrac{3}{x} + 4 = \dfrac{3 + 4x}{x} \geq 0$



又 $x(3 + 4x) \geq 0$ 之解為

$x \geq 0$ 或 $x \leq -\dfrac{3}{4}$

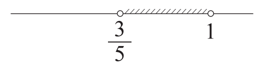
但 $x = 0$ 時無法滿足 $\dfrac{3}{x} \geq -4$

$\therefore \dfrac{3}{x} \geq -4$ 之解為 $x > 0$ 或 $x \leq -\dfrac{3}{4}$

(3) $\dfrac{2}{x-1}>5$ $\quad\therefore\ \dfrac{2}{x-1}-5=\dfrac{2-5(x-1)}{x-1}=\dfrac{3-5x}{x-1}>0$

又 $(3-5x)(x-1)=-(5x-3)(x-1)>0$

$\Rightarrow (x-1)(5x-3)<0$



得 $\dfrac{3}{5}<x<1$

$\therefore\ \dfrac{2}{x-1}>5$ 之解為 $\dfrac{3}{5}<x<1$ 。

1.1.3 絕對值

定義 若 x 為實數，則 x 之絕對值記做 $|x|$ ，定義為

$$|x|=\begin{cases} x, x\geq 0 \\ -x, x<0 \end{cases}。$$

例如：$|-3|=3$，$|3|=3$，$|1+\sqrt{3}|=1+\sqrt{3}$，$|1-\sqrt{5}|=-(1-\sqrt{5})=\sqrt{5}-1$ 。習慣上，規定 $\sqrt{x^2}=|x|$ 。

1.1.4 絕對值之性質

定理 a ， x 均為實數，則

(1) $|x-a|=|a-x|$ (2) $|ax|=|a||x|$

(3) $-|x| \le x \le |x|$　(4) $\left|\dfrac{x}{a}\right| = \dfrac{|x|}{|a|}$，但 $a \neq 0$

(5) $|x^n| = |x|^n$

基本上，若 $a>0$ 則：

$$\begin{cases} |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a, & |x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a \\ |x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ 或 } x < -a, & |x| \ge a \Leftrightarrow x \ge a \text{ 或 } x \le -a \end{cases}$$

例 4. 解滿足(1) $|x-1| \le 2$　(2) $|x-1| > 1$
(3) $|x-1| \le -2$　(4) $|x-1| = 2$ 之解

解 (1) $|x-1| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le x-1 \le 2$　$\therefore -1 \le x \le 3$

(2) $|x-1| > 1 \Leftrightarrow x-1>1$ 或 $x-1<-1$，即 $x>2$ 或 $x<0$

(3) $\because |x-1| \ge 0$　$\therefore |x-1| \le -2$ 為不可能，即不存在一個實數滿足 $|x-1| \le -2$

(4) $|x-1| = 2$　$\therefore x-1 = \pm 2$ 得 $x-1=2$ 或 $x-1=-2$ 即 $x=3$ 或 -1

例 5. 求 δ（δ 與 ε 有關）

(a) $|x-3| < \delta \Rightarrow |3x-9| < \varepsilon$

(b) $|x+5| < \delta \Rightarrow |2x+10| < \varepsilon$

(c) $|x-6| < \delta \Rightarrow \left|\dfrac{x}{3} - 2\right| < \varepsilon$

解 (a) $|3x-9| < \varepsilon \Leftrightarrow 3|x-3| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow |x-3| < \dfrac{\varepsilon}{3}$　$\therefore$ 取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$

(b) $|2x+10| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x+5| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow |x+5| < \dfrac{\varepsilon}{2}$　$\therefore$ 取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$

(c) $\left|\dfrac{x}{3}-2\right|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-6|<3\varepsilon$ $\quad\therefore$取 $\delta=3\varepsilon$

隨堂演練

求 δ（δ 與 ε 有關），使得 $|x-2|<\delta$

$\Rightarrow |3x-6|<\varepsilon$

〔提示〕

$\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$

習題 1-1

1. 下列敘述何者成立。（成立記 T，不成立記 F）
   (1)若 x, y 均為無理數，則 $x+y$ 必為無理數
   (2)若 x, y 均為無理數，則 $x \cdot y$ 必為無理數
   (3)若 x, y 均為實數，則 $x=y$ 必有 $|x|=|y|$
   (4)若 x, y 均為實數且 $\dfrac{x}{y}\geq 1$ （$y\neq 0$），則有 $x\geq y$。
   (5) x 為實數，若 $x<0$，則 $\sqrt{x^2}=-x$
   (6) x 為實數，若 $|x|<\varepsilon$，ε 為任意小之正數則 $x=0$
   (7) x, y 為實數，若 $|x|<|y|$ 則 $x^2<y^2$
   (8) x, y 為實數，若 $x<y$ 則 $x^3<y^3$
2. 求下列不等式之解
   (1) $2x+5<4x+11$
   (2) $3x+4\geq x^2$
   (3) $x^2+5x\geq 6$

(4) $\dfrac{x+5}{2x-1} \leq 0$

(5) $\dfrac{1}{3x-2} \leq 4$

(6) $x^2 - x - 12 > 0$

(7) $x^3 - x^2 - 12x > 0$

(8) $x(x-1)(x-2) \geq 0$

(9) $(x+2)(x+1)^2(x-5) < 0$

(10) $\dfrac{1}{x} > 3$

3.求下列不等式之解

(1) $|x+1| < 5$

(2) $\left|\dfrac{x}{3} - 2\right| \leq 2$

(3) $|2x-7| < 3$

(4) $|2x+1| < 5$

(5) $|3x-5| \leq 1$

4.求下列各子題之 δ ，使得下列不等式關係存在。

(1) $|x+1| < \delta \Rightarrow |2x+2| < \varepsilon$

(2) $|3x+2| < \delta \Rightarrow \left|x + \dfrac{2}{3}\right| < \varepsilon$

(3) $|2(x+2)| < \delta \Rightarrow |x+2| < \varepsilon$

解

1.(1) F（$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$） (2) F（$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$） (3) T

(4) F（$x = -4$，$y = -2$，$\dfrac{x}{y} = 2 > 1$ 但 $x \ngeq y$）

(5) T (6) T (7) T (8) T

2.(1) $x > -3$ (2) $-1 \leq x \leq 4$ (3) $x \geq 1$ 或 $x \leq -6$ (4) $-5 \leq x < \dfrac{1}{2}$

(5) $x \geq \frac{3}{4}$ 或 $x < \frac{2}{3}$　(6) $x > 4$ 或 $x < -3$　(7) $x > 4$ 或 $0 > x > -3$

(8) $x \geq 2$ 或 $1 \geq x \geq 0$　(9) $5 > x > -2$　(10) $\frac{1}{3} > x > 0$

3.(1) $-6 < x < 4$　(2) $0 \leq x \leq 12$　(3) $2 < x < 5$

(4) $-3 < x < 2$　(5) $-\frac{4}{3} \leq x \leq 2$

4.(1) $\delta = \varepsilon/2$　(1) $\delta = \varepsilon/3$　(3) $\delta = \varepsilon/2$

1.2　函數

1.2.1　函數定義

在社會科學中人們對於一個變數與另一個變數或一個變數與另一群變數間之關係常感到興趣，量化模式之建構即在尋求建立這些變數間之關係。以二個變數間之關係為例，二個變數間若有某種關係存在，它可能有兩個情況，一是這兩個變數間具有函數關係，例如圓的半徑 r 與其面積間有圓面積 $= \pi r^2$ 之關係，又如華氏溫度（°F）與攝氏溫度（℃）間有 °F $= \frac{9}{5}$℃ $+ 32°$ 之關係，另一種情況是這兩個變數間有統計關係（Statistical Relationship），例如一個人的學歷與其所得有某種關係存在，亦即學歷高的人通常所得較高，但也有一些所得高的人學歷卻不高，但總括來說，