第八章

8-7 互易原理（Reciprocal Theorem）

結構分析中常用之互易原理包括有馬克斯威爾法則（Maxwell's law）與貝帝法則（Betti's law），現分別說明如下：

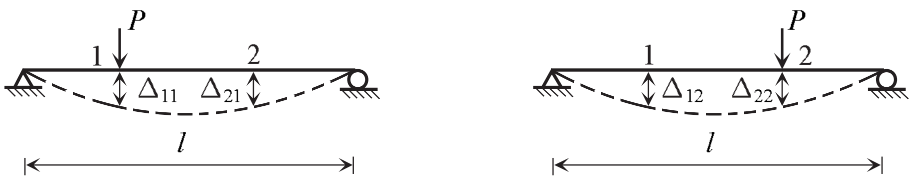
8-7-1 馬克斯威爾法則

馬克斯威爾法則之全名應為「馬克斯威爾變位互易原理」，於 1864 年由 James C. Maxwell 所提出，此原理在結構分析中是十分重要的，由於此原理僅可適用於線性彈性結構，因此被分析的結構應符合以下兩個基本條件：

⑴材料之特性必須符合虎克定律（Hook's law）

⑵應力－應變之關係必須在彈性範圍內

現將馬克斯威爾法則說明如下：



(a) (b)

圖 8-17

圖 8-17(a)所示為一簡支梁，當 1 點處受垂直力 P 作用時，假設 1 點處之垂直位移為 Δ_{11}，而 2 點處之垂直位移為 Δ_{21}。圖 8-17(b)所示為同一根簡支梁，但垂直力 P 係作用於 2 點，此時 1 點處之垂直位移假設為 Δ_{12}，而 2 點處之垂直位移假設為 Δ_{22}。

藉由單位虛載可得出

$$\Delta_{21} = \int_0^l m_2 \frac{M_1}{EI} dx \tag{8-71}$$

式中，M_1 為垂直力 P 作用於 1 點時，簡支梁內之彎矩；m_2 為單位虛載重作用於 2 點時，簡支梁內之彎矩。

同理，

$$\Delta_{12} = \int_0^l m_1 \frac{M_2}{EI} dx \tag{8-72}$$

式中，M_2 為垂直力 P 作用於 2 點時，簡支梁內之彎矩；m_1 為單位虛載重作用於 1 點時，簡支梁內之彎矩。

由以上之關係可看出

$$M_1 = Pm_1$$
$$M_2 = Pm_2$$

因此

$$\begin{aligned}\Delta_{21} &= \int_0^l m_2 \frac{M_1}{EI} dx \\ &= \int_0^l m_2 \frac{(Pm_1)}{EI} dx \\ &= \int_0^l m_1 \frac{(Pm_2)}{EI} dx \\ &= \int_0^l m_1 \frac{M_2}{EI} dx \\ &= \Delta_{12}\end{aligned}$$

由上式可確知

$$\Delta_{21} = \Delta_{12} \tag{8-73}$$

（8-73）式即為馬克斯威爾法則的基本公式。

在圖 8-17 中，若令垂直力 $P=1$，則（8-73）式可寫為

$$\delta_{21}=\delta_{12} \tag{8-74}$$

式中，δ_{21} 表單位集力作用於 1 點時，於 2 點處的位移；δ_{12} 表單位集中力沿 δ_{21} 方向作用於 2 點時，沿 1 點處原單集中力作用方向的位移。

實際上，結構之變位包含線位移及角位移，因此馬克斯威爾法則可推廣應用如下：

⑴單位力矩作用於 1 點時，於 2 點處的角位移應與單位力矩作，用於 2 點時，於 1 點處之角位移相等。

⑵單位集中力作用於 1 點時，於 2 點處的角位移應與單位力矩作用於 2 點時，於 1 點處沿單位集中力方向之線位移數值相等。

由以上的推廣應用可知，（8-74）式可更廣泛的寫成柔度係數的形式，即

$$f_{21}=f_{12} \tag{8-75}$$

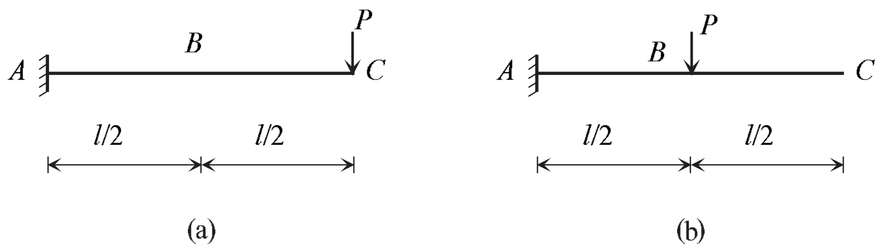


圖 8-18

現以圖 8-18 來說明馬克斯威爾法則之實際應用。圖 8-18(a)及 8-18(b)所示為相同的懸臂梁（梁長為 l，EI 為常數），當載重 P 垂直作用於 C 點時，可算得 B 點的垂直位移為

$$\Delta_{BC}=\frac{5Pl^3}{48EI} \qquad (\downarrow)$$

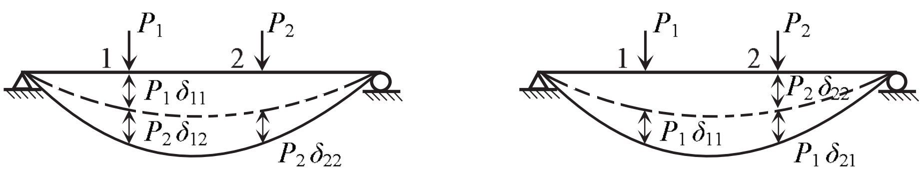
而當載重 P 垂直作用於 B 點時，可算得 C 點的垂直位移為

$$\Delta_{CB}=\frac{5Pl^3}{48EI} \qquad (\downarrow)$$

故知 $\Delta_{BC}=\Delta_{CB}$

8-7-2 貝帝法則

貝帝法則又稱功互易原理，乃是馬克斯威爾法則之延伸，因此基本假設條件與馬克斯威爾法則相同。現將貝帝法則說明如下



(a)先施加第一組外力 P_1，然後再施加第二組外力 P_2

(b)先施加第二組外力 P_2，然後再施加第一組外力 P_1

圖 8-19

貝帝法則係由功的原理來導出，並同時考量外載重之先後作用順序。圖 8-19(a)所示為先施加第一組外力 P_1，造成簡支梁產生彈性變形 $P_1\,\delta_{11}$（如虛線所示）後，再施加第二組外力 P_2，造成簡支梁產生更進一步的變位 $P_2\,\delta_{12}$ 與 $P_2\,\delta_{22}$。此系統所作之總功 W_1 是由下面兩種受力情形所造成：

⑴第一組外力 P_1 所作之功 $W_1^*=\dfrac{1}{2}P_1\,(P_1\,\delta_{11})$

⑵第一組外力 P_1 保持不動，繼續施加第二組外力 P_2，由 P_1 及 P_2 所作之功

$$W_1^{**}=P_1\ (P_2\delta_{12})+\frac{1}{2}P_2\ (P_2\delta_{22})$$

因此

$$\begin{aligned}W_1&=W_1^{*}+W_1^{**}\\&=\frac{1}{2}P_1\ (P_1\delta_{11})+P_1\ (P_2\delta_{12})+\frac{1}{2}P_2\ (P_2\delta_{22})\end{aligned}\qquad(8\text{-}76)$$

（8-76）式所表示的總功，實際上係指圖 8-20 中所示的兩塊三角形面積與一塊矩形面積之總和。

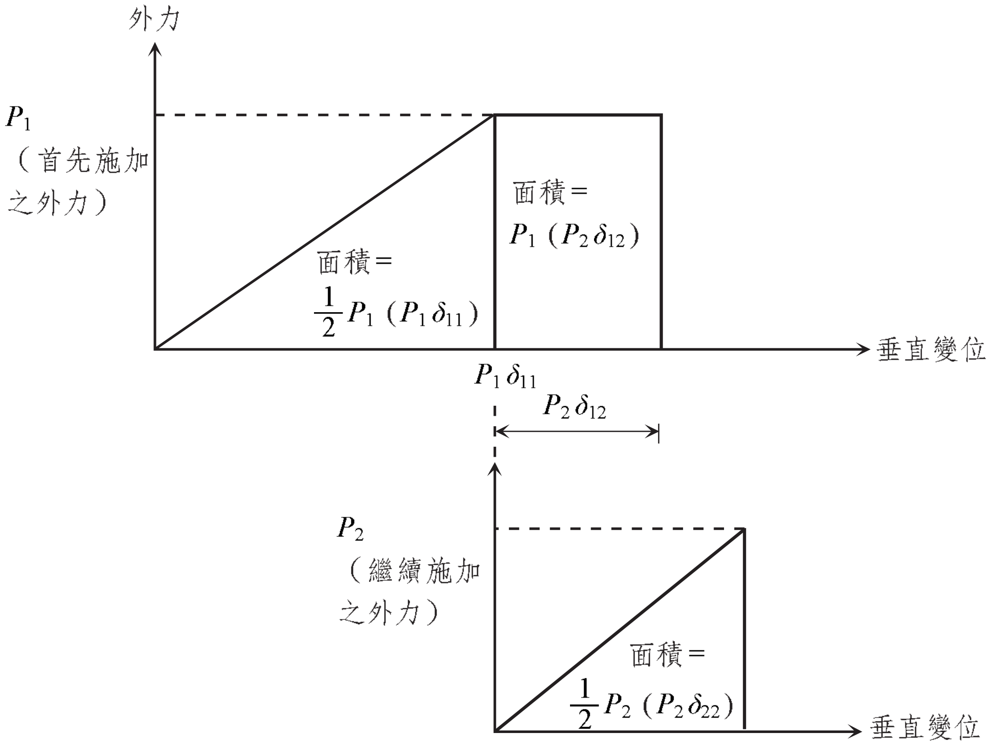


圖 8-20　簡支梁受階段性外力時所作之功

圖 8-19 (b)所示簡支梁之受力情形恰與圖 8-19 (a)相反，亦即先施加第二組外力P_2，造成簡支梁產生彈性變形$P_2\delta_{22}$（如虛線所示）後，再施加第一組外力P_1，造成簡支梁產生更進一步的變位$P_1\delta_{11}$與$P_1\delta_{21}$。

同理可得出此系統所作之總功W_2為：

$$W_2=\frac{1}{2}P_2\ (P_2\delta_{22})+P_2\ (P_1\delta_{21})+\frac{1}{2}P_1\ (P_1\delta_{11}) \tag{8-77}$$

對於線性彈性結構而言，力的作用順序不影響所作之功，因此由$W_1=W_2$，可得出

$$P_1\ (P_2\delta_{12})=P_2\ (P_1\delta_{21}) \tag{8-88}$$

上式亦可寫成

$$W_{12}=W_{21} \tag{8-89}$$

（8-88）式或（8-89）式即為貝帝法則，表示第一組外力P_1對第二組變位$P_2\delta_{12}$所作之功W_{12}應等於第二組外力P_2對第一組變位$P_1\delta_{21}$所作之功W_{21}。

於（8-88）式中，若消去P_1P_2，即為馬克斯威爾法則：$\delta_{12}=\delta_{21}$。

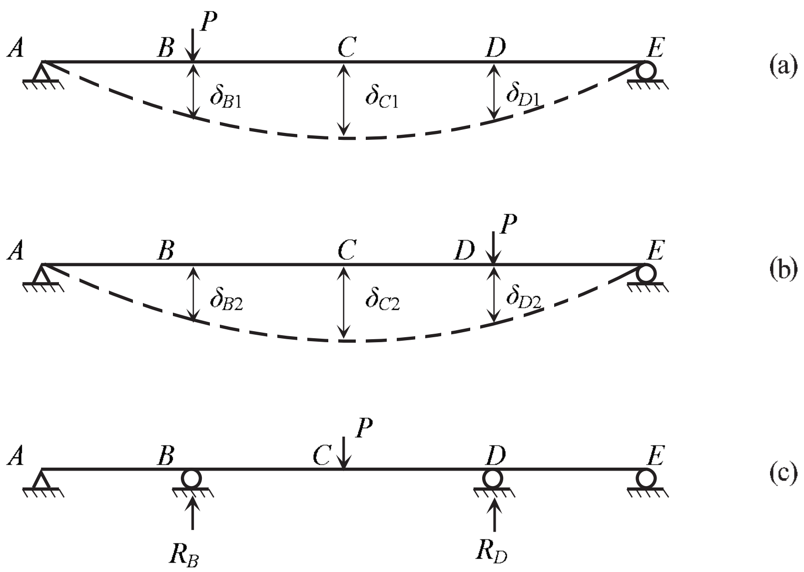
由以上的觀點，馬克斯威爾法則亦可解釋為：第一組單位力在第二組單位力方向所引起的變位應等於第二組單位力在第一組單位力方向所引起的變位。

由上述說明可看出，馬克斯威爾法則僅是貝帝法則的一個特例，而貝帝法則涵蓋之物理意義較廣，已論及功與能量。

例題 8-39

圖(a)～(c)為相同情形的梁（僅支承不同），試利用互易原理，證明圖(c)中 D 點的反力為

$$R_D=\frac{(\delta_{B1})(\delta_{C2})-(\delta_{B2})(\delta_{C1})}{(\delta_{B1})(\delta_{D2})-(\delta_{B2})(\delta_{D1})}P$$



解

利用貝帝法則，由圖(a)及圖(c)可得

$$(P)(O)=-(R_B)(\delta_{B1})+(P)(\delta_{C1})-(R_D)(\delta_{D1})$$

即 $\quad R_B=\dfrac{1}{\delta_{B1}}[(P)(\delta_{C1})-(R_D)(\delta_{D1})]$ (1)

再由圖(b)及圖(c)得

$$(P)(O)=-(R_B)(\delta_{B2})+(P)(\delta_{C2})-(R_D)(\delta_{D1})$$

即 $R_B = \frac{1}{\delta_{B2}}\left[(P)(\delta_{C2}) - (R_D)(\delta_{D2})\right]$ (2)

令(1)式＝(2)式，得

$$R_D = \frac{(\delta_{B1})(\delta_{C2}) - (\delta_{B2})(\delta_{C1})}{(\delta_{B1})(\delta_{D2}) - (\delta_{B2})(\delta_{D1})}P$$