Chapter 1

投資組合理論與評價模型

1mb61.tpf-2 9/13/2004 12:44:54

前　言

投資組合指的是由一種以上的證券或是資產構成的集合，而投資組合理論主要探討投資人該如何制定決策，才能形成在風險固定的情況下，使報酬率達到最大，或是報酬率固定的情況下，使風險降到最低的投資組合，又稱效率投資組合。例如，投資人可以透過持有不同的證券方式，將隱含在個別證券的風險（非系統風險）分散掉，但存於證券與證券間的共同風險（系統風險）則無法分散。

資本資產評價模型（CAPM）的目的在於協助投資人決定資本資產的價格。CAPM 描述在證券的供需達到均衡時，存於證券的系統風險（不可分散的風險）與預期報酬之間的關係，而系統風險可由貝他係數衡量出來；套利評價理論（APT）以無風險套利的論點出發，認為市場若有效率，無風險套利的機會不可能持續存在。股票的期望報酬率受系統內共同因子所決定（不單只有系統風險），並推論股票期望報酬為 K 個因素的線性函數，雖然其對於因素的數目與內容並未明確指明，但就其內容而言，應為描述經濟體系變數的因子。

本章簡單探討 CAPM 與 APT 的異同點，並介紹如何由組合理論推展至 CAPM 與 APT，以及從 CAPM 及 APT 如何發展與演進。

第一節　現代投資組合理論的風險衡量

隨著科技發展迅速與商業行為熱絡，金融商品趨於多樣化，投資管道也愈來愈多元；多樣化的商品使得投資人愈來愈難掌握良好的投資工具，使投資行為往往是冒著巨大的風險下所做的決定。傳統上投資人只能用簡單的自我判斷或是道聽塗說來選擇其投資商品，殊不知能靠著多樣的金融商品和運用良好的財務理論，使其投資不再是非理性下所作的

決定。

直到在 1952 年馬克維茲提出現代投資組合理論，投資組合才有一套較完整的概念產生。馬克維茲以均值−變異數（The Mean-Variance Criterion，簡稱MV）建立投資組合，來降低投資所帶來的風險，至此傳統靠著直覺或是道聽塗說盲目投資方式不再適用。馬克維茲的理論說明在某已知的均值報酬率（或期望報酬率）水準下，所建立的投資組合風險最小；在 1959 年，他將投資組合理論與風險報酬分散原理正式加以定理化，奠定了現代投資組合理論的根基，其中報酬和風險的界定以平均數來代表投資組合的報酬，另外以變異數來衡量潛在風險，並以此建構該投資組合之效率前緣。

效率前緣是建構在以下的幾點假設下：

1. 只有均值與變異數是投資組合選擇的原則，報酬率分配的其他較高階動差（Higher Moment）在組合選擇中不重要。
2. 就某一組合報酬水準而言，投資者選擇最低風險的組合。
3. 資產的股份可無限分割（Infinitely Divisible），即投資者可持有不是整數的股份。
4. 不存在交易費用與稅負。
5. 投資者可以無限制賣空資產。
6. 投資者不是價格的決定者，即投資者爲價格的接受者（Price Taker）。

除了馬克維茲利用平均數−變異數建立最低風險與效率邊緣的特性外，Roll（*1977*）亦利用效率集合數學（Efficient Set Mathematics）導出現代投資組合理論；Lintner（*1965*）與 Mossin（*1966*）等人則將個別投資組合選擇行為加以綜合化，在同質期望（Homogeneous Expectation）及其他的假設下，進一步導出資本市場理論。

繼馬克維茲之後，陸續又有許多學者對馬克維茲的理論提出修正與更新，因為馬克維茲是以變異數來衡量風險，若以此來估計風險，無論投資商品的價格上升或是下降都將視為相同的風險，但嚴格而論，價格的下跌才是投資人真正想規避的風險。基於上述的爭議，Bawa and Lindenberg（*1977*）及 Fishburn（*1977*）以低偏動差（Lower Partial Moment）為損失風險觀念，發展出平均數－低偏動差模型。此外，也有其他學者，如 Sharpe（*1964*）、Lintner（*1965*）與 Mossin（*1966*）等人，將馬克維茲的理論加以推廣，並導出資本資產評價模型（Capital Asset Pricing Model，CAPM）。CAPM 認為，風險性資產的報酬率與單一共同因素間存有線性關係，該單一共同因素稱為市場風險；而許多學者驗證 CAPM 後發現有許多缺點，有鑑於此，Ross 遂於 1976 年發展出套利評價理論（Arbitrage Pricing Theory，APT），試圖取代 CAPM。

第二節　現代投資組合理論的發展

一、 投資組合理論之建立流程

由馬克維茲提出以三種證券為例子，他將組合理論風險原理加以定理化，組合極小風險與期望報酬。他利用單一資產在一期間所產生的平均報酬（預期報酬率）並計算出其變異數（風險），組合二至多數資產的平均報酬，並以投入資金權數的變動，調整其組合風險值，求出最小風險所需之權數。當投資標的物數目增加到極限時，屬於個別資產之平均風險（非系統風險）已被平均分散，不過平均共變異數部分的風險（系統風險）仍將存在。而整個以均值－變異數建立投資組合的流程如下：

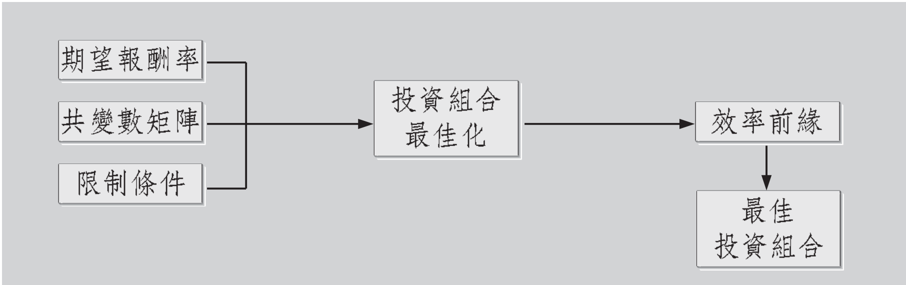

圖 1-1 投資組合的建立流程

二、投資組合理論之基本介紹

投資組合是由一種以上的證券或資產所構成的集合。投資組合理論探討的是投資人應該如何制定投資決策，才能形成一個在風險固定的情況下，可使報酬率達到最大，或在報酬率固定的情況下，可使風險降到最低的投資組合。

投資組合的預期報酬率爲：

$$E(R_p)=\sum_{i=1}^{n} W_i E(R_i) \qquad \textbf{(1-1)}$$

其中 W_i：投資組合中標的 i 的權重（$\sum_{i=1}^{n} W_i=1$）。

$E(R_i)$：投資組合中標的 i 的預期報酬率。

亦即，投資組合的預期報酬率僅是組合中，個別證券預期報酬率的加權平均數而已。

投資組合的風險爲：

$$\begin{aligned}\delta_p^2&=E\{[W_a\tilde{R}_a+W_b\tilde{R}_b-W_aE(R_a)-W_bE(R_b)]^2\}\\&=E\{[W_a\tilde{R}_a-W_aE(R_a)+W_b\tilde{R}_b-W_bE(R_b)]^2\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= E\{[W_a(\tilde{R}_a - E(R_a)) + W_b(\tilde{R}_b - E(R_b))]^2\} \\
&= E\{[W_a^2(\tilde{R}_a - E(R_a))^2 + 2W_aW_b(\tilde{R}_a - E(R_a))(\tilde{R}_b - E(R_b)) + \\
&\quad W_b^2(\tilde{R}_b - E(R_b))^2]\} \\
&= W_a^2E[[\tilde{R}_a - E(R_a)]^2] + 2W_aW_bE[(\tilde{R}_a - E(R_a))(\tilde{R}_b - E(R_b))] \\
&\quad + W_b^2E[[\tilde{R}_b - E(R_b)]^2] \\
&= W_a^2\delta_a^2 + 2W_aW_b\delta_{ab} + W_b^2\delta_b^2 \qquad (\mathbf{1\text{-}2})
\end{aligned}
$$

由此可知，兩種證券構成的組合，其變異數並非僅是組合中個別證券的加權平均數而已，它係由兩個變異數和兩個共變異數所構成，若組合中含有N種證券，則其變異數將由N平方個項目構成，其中有N個變異數和$N(N\text{-}1)$個共變異數。

$$
\begin{aligned}
\delta_p^2 &= W_1^2\delta_1^2 + W_2^2\delta_2^2 + \cdots + W_n^2\delta_n^2 + 2W_1W_2\delta_{12} + 2W_1W_3\delta_{13} + \cdots + 2W_n \\
&\quad W_{n-1}\delta_{n(n-1)} \\
&= W_i^2\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2 + W_iW_j\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n}\delta_{ij} \qquad (\mathbf{1\text{-}3})
\end{aligned}
$$

若組合中含有N種證券，且$W_i = \dfrac{1}{N}$，$\delta_i^2 = V$，而$\bar{\delta}_{ij}$代表平均數共變異數，則

$$
\begin{aligned}
\delta_p^2 &= \left(\frac{1}{N}\right)^2\sum_{i=1}^{n}V + \left(\frac{1}{N}\right)\left(\frac{1}{N}\right)N(N-1)\bar{\delta}_{ij} \\
&= \left(\frac{1}{N}\right)^2 NV + \frac{N^2-N}{N^2}\bar{\delta}_{ij} \\
&= \left(\frac{1}{N}\right)V + \left(1-\frac{1}{N}\right)\bar{\delta}_{ij} \qquad (\mathbf{1\text{-}4})
\end{aligned}
$$

當$N \Rightarrow \infty$，$\left(\dfrac{1}{N}\right) \Rightarrow 0$，故$\delta_p^2 = 0 \cdot V + (1-0)\bar{\delta}_{ij} = \bar{\delta}_{ij}$，亦即，當組合中

的證券數目非常多時，個別證券變異數的影響幾乎消失，而組合中的變異數幾乎全由共變異數所構成。投資人因此可以透過持有多種不同證券的方式，將隱含在個別證券中的風險分散掉，但存於證券與證券間的共同風險則無法分散。

第三節　組合理論的演進

一、組合理論演進至 CAPM 與 APT

依據均異效率（Mean-Variance Efficiency）所建立的資本市場理論模型，Sharpe 於 1964 年提出 CAPM 模型。此模型指出，在完美市場假設下，當證券市場達成均衡，個別證券的期望報酬與市場系統風險存在線性關係，且系統風險為解釋橫斷面期望報酬的唯一因子，但在許多實證研究發現，系統風險無法單獨解釋股票報酬。Ross（*1976*）提出多因子模式的套利評價理論（Arbitrage Pricing Theory，APT），即為補強 CAPM 中系統風險所無法解釋的部分所發展之模型，並強調影響證券報酬率的不只一個，所以屬於單一因子模型的 CAPM 是有些缺失，Ross 提出 APT，就是試著從多方面的角度去詮釋股票報酬率的行為，以彌補 CAPM 的不足之處，並認為會影響股票報酬率的行為是多個因素，而非只有市場風險因素所造成。

二、CAPM 的解釋

投資組合報酬率由於多角化的關係，消弭了非系統風險，因此只受到系統風險的大小影響，通常以貝他值（β）來表示，其係數值常使用過去某一段期間中的報酬率來估算，並假定證券在未來的報酬率相對於市場投資組合報酬率的變動程度，與過去那一段期間相同，亦即 β 值是市場報酬率變動時，個別資產之預期報酬率同時發生變動的程度。實務

上，投資界人士都採用爲期 5 年，長達 60 個月的報酬率，或 150~200 日的日報酬率，來估計股票的貝他係數。

市場模式（Market model）：

$$R_{j,t}=a_j+b_j(R_{I,t})+e_{j,t} \tag{1-5}$$

有了市場模式後，便可以利用過去的報酬率資料，透過統計學上的最小平方迴歸法（Least Squares Regression Method）估算出（1-5）式中係數 a_j 與 b_j。根據最小平方迴歸法，第 j 種證券β的估計值 b_j，等於第 j 種證券與市場投資組合間的共變異數（δ_{jI}）除以市場投資組合的變異（δ_I^2）：

$$b_j=\frac{\delta_{jI}}{\delta_I^2}=\frac{\sum_{t=1}^{n}(R_{j,t}-\bar{R}_j)(R_{I,t}-\bar{R}_I)}{\sum_{t=1}^{n}(R_{I,t}-\bar{R}_I)^2} \tag{1-6}$$

$$a_j=\bar{R}_j-b_j\bar{R}_I$$

$$\hat{R}_{j,t}=a_j+b_jR_{I,t}$$

$$e_{j,t}=R_{j,t}-\hat{R}_{j,t}$$

其中 $R_{j,t}$：第 j 種證券在第 t 期的實際報酬率

a_j：截距項，是一個常數

b_j：第 j 種證券貝他係數估計值

$R_{I,t}$：市場投資組合在第 t 期的實際報酬率

$e_{j,t}$：第 j 種債券在第 t 期的誤差項

上述（1-5）式用來估計第 j 種證券在第 t 報酬率的迴歸方程式，稱爲特性線（Characteristic Line），再把 β 的觀念導入 CAPM，即是資本資產評價模型。CAPM 說明當證券市場達成均衡時，在一個「以有效多角化並達成投資效率」的投資組合中，其主要目的在於協助投資人決定

資本資產的價格；它描述的是在證券的供需達到均衡時，存於證券的市場風險與預期報酬率間的關係。而其中的效率指的是，理性的投資人會選擇「在總風險相同下，相對上可獲得最高的預期報酬率」，或是「預期報酬率一致時，相對上總風險最低」。

CAPM 所闡明的「風險－報酬」的關係如下：

$$E(R_i)=R_f+[E(R_m)-R_f]\cdot\beta_i \tag{1-7}$$

其中 $E(R_i)$：投資組合中第 i 個證券的預期報酬

R_f：無風險利率

$E(R_m)$：市場（或市場投資組合）的預期報酬

β_i：系統風險指標

$[E(R_m)-R_f]$：風險溢酬部分

另外，兩種不同市場報酬率的代表意義，分別出自 Sharpe 與 Black，主要區別在於他們對 R_f 之看法不同，Sharpe 認爲它爲無險報酬率（投資所獲報酬確定不變），而 Black 認爲它爲市場最低風險組合下所產生之市場報酬率，而標的物數目爲極大值。

三、APT 的解釋

CAPM 模型用於預測債券的風險與期望收益率的關係，是測量風險、估價證券的基準和衡量投資績效的標準。但是，導出這個模型需要基於幾個假設，其中一些假設顯得過於理想化，致使該模型的實用性和有效性受到質疑。很多學者在驗證 CAPM 後發現：

1. 高風險股票（$\beta>1$）實際賺得的報酬率比 CAPM 預期少，而低風險股票（$\beta<1$）實際賺得的報酬率比 CAPM 預期多。
2. 就長期而言，股票的報酬率與貝他係數間存有線性關係。