

## 第1章

## 緒論

→呂玉琴、李源順、劉曼麗

## 第一節

## 教學、學習與評量的理論基礎

本書以美國數學教育成就評量（National Assessment of Educational Progress, NAEP）所提出的數學威力（Mathematical Power）、數學能力（Mathematical Abilities）、數學內容（Content Strands）三個向度做為探究數學內容、學習、教學與評量的理論基礎。底下我們對這三個向度一一作說明。

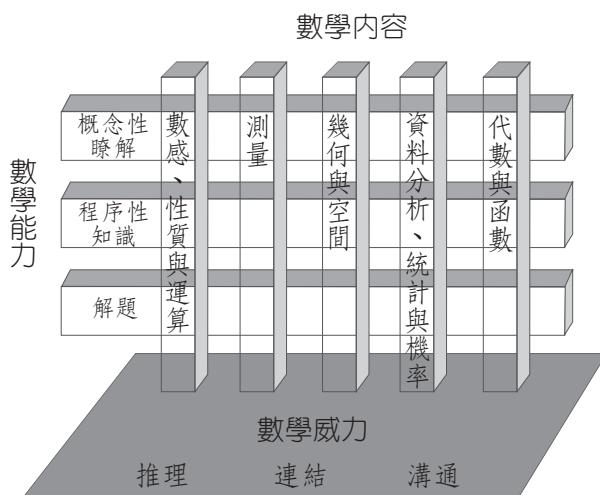


圖1-1-1 美國NAEP的數學評量架構圖

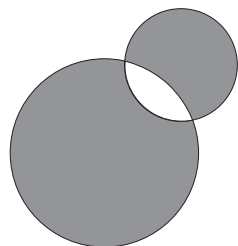
## 一、數學威力

現今數學教育的理念是要培養學生的數學威力，希望學生有全面性的能力能結合和使用數學知識去進行探究、臆測、邏輯推理、解決非例行性的問題；能在數學脈絡之內，或其他的學科脈絡進行連結；以及能進行數學的溝通。因此，數學威力是由推理（Reasoning）、連結（Connections）和溝通（Communication）三個因子組成。

### （一）推理

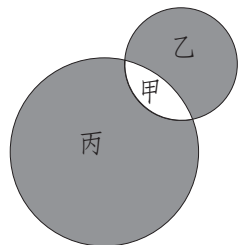
推理是指學生能認知數學的基本內容，學生能進行探究與數學臆測，學生能發展對數學論證的評價，學生能選擇使用不同的推理和證明方法。例如：

右圖中，小圓的  $\frac{3}{4}$  是陰影部分，大圓的  $\frac{5}{6}$  是陰影部分，求小圓的陰影面積對大圓的陰影面積的比。



我們把右圖兩圓共同的那一塊白色部分稱為甲，小圓的陰影部分稱為乙，大圓的陰影部分稱為丙，如右下圖。學生在解上述問題時，必須從「小圓的  $\frac{3}{4}$  是陰影部分」推知：甲是占小圓  $\frac{1}{4}$  的，乙是占小圓的  $\frac{3}{4}$ ，再從上述資料推知甲當作1份，那麼，乙就是占3份。同樣的，學生必須從「大圓的

$\frac{5}{6}$  是陰影部分」推知：甲是占大圓的  $\frac{1}{6}$ ，丙是占大圓的  $\frac{5}{6}$ ，再推知甲當作1份，那麼，丙就是占5份。接著利用甲來連接乙和丙的關係，所以如果乙當作3份，那麼丙就是5份，亦即小圓的陰影



面積對大圓的陰影面積的比是3：5。

又如，我們在導出平行四邊形的面積公式時，從平行四邊形的一個頂點到一邊做高（如圖1-1-2的左圖），所形成的三角形搬到另一邊時，因為， $\angle CBA + \angle EAD = 180^\circ$ ， $\angle DAF = \angle CBA$ ，所以搬過去以後 $\angle DAF + \angle EAD = 180^\circ$ ，所以EA和AF會在同一直線上，又 $\angle DCE = \angle CEA = \angle AFD = 90^\circ$ ，所以四邊形CEFD是一個長方形。

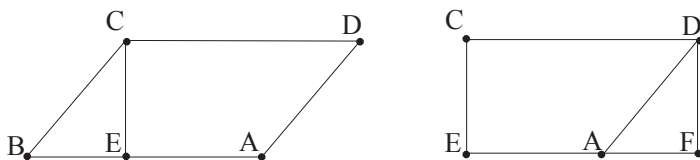


圖1-1-2 平行四邊形變成長方形

## (二)連結

連結是指學生能理解並進行數學概念間的連結，學生能瞭解數學概念是環環相扣的體系，學生能在數學外的領域辨認和使用數學。以分數概念和其他數學概念間的連結為例，分數的分母為10時，可以和小數連結，例

如： $\frac{3}{10} = 0.3$ ；當分數的分母為100時，分數可以和百分率相連結，例如：

$\frac{3}{100} = 3\%$ ；分數可以看成是兩個整數相除的結果，例如： $2 \div 5 = \frac{2}{5}$ ；分數

也可以看成是兩個整數相比的結果，例如： $2 : 5 = \frac{2}{5}$ 。亦即分數和小數、百分率、除法、比等數學概念間是互相有關聯的，可以彼此連結的。

連結也包括數學和其他學科之間的連結。例如：在小學的自然科教學中，常常要求小朋友種豆子並觀察豆子的成長，教師會要求學生記錄哪一天開始種豆子？哪一天豆子開始發芽？共經過幾天？這些都和數學的時間概念有關。接著教師會要求學生每天量豆子的長度，這和數學的長度概念有關。又如體育課，教師考仰臥起坐，一分鐘做幾下？這和數數有關聯。

教師想知道班上同學的跑步速度，要求每個學生跑100公尺（距離、長度），並量花掉的秒數（時間概念）等等。

此外，連結也可以包括數學與生活間的連結。例如：要到阿里山旅行時，查看火車及客運的時刻表是生活與一維或二維統計表的連結。日常生活中使用的秒與分則是一種六十進位制的數學概念，它是學生拓展常見的十進位制概念的重要內容。

### (三)溝通

溝通是指學生能透過溝通強化數學思維，學生能和同學、教師及他人溝通他們的數學思維，學生能分析和評估他人的數學思維和策略，學生能使用數學語言表達他的數學概念。例如：五年級教師在課堂上問：什麼是分數？

甲說：分數是把一個物品，分成幾份後，其中的幾份。

乙說：分數是不大於1。

丙說：分數是一個完整的東西平分後就是裡面的一份。

透過學生的語言表達，我們知道甲生未注意到等分概念，乙生的分數概念可能未涵蓋假分數、帶分數，丙生舉的是連續量的情境、舉的是單位分數的例子、有注意到等分概念等。教師可以根據學生表達的內容進一步協助學生建立更完整的分數概念。又如，學生能說出因為 $2 \div 3$ 是兩個蘋果平分給三個人，每個人都得到 $\frac{2}{3}$ 個蘋果，所以 $2 \div 3 = \frac{2}{3}$ ，也是一種溝通的表現。

要注意的是這裡所指的溝通，不一定要用口語來表達，只要是能使用數學相關的符號、文字、語言，使他人瞭解所要表達的概念，都算是在進行溝通。因此，學生把想要表達的概念寫出來，或者利用圖形表徵表達出來，只要他人可以理解，都是在進行溝通。

本書認為培養學生的推理、連結和溝通能力不是短暫時間內可以達成的，它需要持久的進行。同時，最好也能在班級的數學教學過程中持續進行，而不是獨立於正規的數學內容教學之外進行。

## 二、數學能力

數學能力可以看成是學生在特定的數學知識內展現出的能力。數學能力包含概念性瞭解（Conceptual Understanding）、程序性知識（Procedural Knowledge）和解題（Problem Solving）三個因子。

### （一）概念性瞭解

概念性瞭解是指學生能辨識以及利用模型、圖形或符號等不同方式來表達出某一數學概念，或是舉出此概念的相關例子或是反例做為說明；此外，他應能知道一些數學原理（如加法原理、乘法原理），並將原理間做相互連結、比較以及整合應用。例如：

四年級教師問： $\frac{1}{4}$  和  $\frac{1}{5}$  比較， $\frac{1}{4}$  比較大？還是  $\frac{1}{5}$  比較大？

學生回答： $\frac{1}{4}$  和  $\frac{1}{5}$  一樣大，因為假如是一杯水啊，一杯是4c.c.裝1c.c.，一杯是5c.c.裝1c.c.，都是1c.c.，所以一樣大。

從學生的回答來看， $\frac{1}{4}$  和  $\frac{1}{5}$  的舉例說明分別是正確的，也就是說，該生可以舉適當的例子來說明單位分數概念。但學生沒有注意到當題目沒有特別說明兩個分數的單位量，而直接要比較兩個分數的大小時，隱含著這兩個分數的單位量是一樣的，因此，要比較  $\frac{1}{4}$  和  $\frac{1}{5}$  的大小時，就不可以  $\frac{1}{4}$  和  $\frac{1}{5}$  採取不同的單位量來說明，而必須用相同的單位量。如20c.c.的  $\frac{1}{4}$  是5c.c.，20c.c.的  $\frac{1}{5}$  是4c.c.，5c.c.比4c.c.多，所以  $\frac{1}{4}$  比較大。亦即該生對比較兩個分數的大小，隱含這兩個分數的單位量要一樣這個概念不瞭解，缺乏概念性瞭解，以至於產生錯誤。又如，學生解  $\frac{3}{8} + \frac{4}{8}$  時，能瞭解  $\frac{3}{8}$  是3個  $\frac{1}{8}$ ， $\frac{4}{8}$  是4個  $\frac{1}{8}$ ，所以， $\frac{3}{8} + \frac{4}{8}$  是有7個  $\frac{1}{8}$ ，亦即  $\frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{7}{8}$ ，也是一種概念性瞭解的表現。

## (二)程序性知識

程序性知識是指學生能在計算的過程中，選擇適當的程序並正確解題；同時，能用模式或符號來檢驗所使用的程序是否正確。同樣的，以 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{5}$ 的大小比較為例，學生如果採 $\frac{1}{4} = \frac{5}{20}$ ， $\frac{1}{5} = \frac{4}{20}$ ， $\therefore \frac{5}{20} > \frac{4}{20}$ ， $\therefore \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$ ，則該生是利用等值分數或通分的程序性知識來解題。至於該生是否知道比較兩個分數的大小，隱含這兩個分數的單位量要一樣這個概念，就不得而知了。如果我們要檢測該生是否具概念性瞭解，可以出類似「哥哥有8個蘋果，姊姊有16個蘋果，哥哥吃掉自己全部蘋果的 $\frac{5}{8}$ ，姊姊吃了自己全部蘋果的 $\frac{3}{8}$ ，請問誰吃的蘋果個數比較多？」的題目讓學生解題。如果學生直接比較 $\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$ ，則學生對比較兩個分數的大小缺乏概念性瞭解。又如，學生能正確計算 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ ，也是一種程序性知識的表現。

## (三)解題性知識

解題性知識是指學生能從資料中逐漸辨識並形成問題；他能瞭解這些資料的充分性與一致性，並能運用相關知識、推理能力，以及採取適合的策略來找出答案；同時，更能去驗證這些答案的合理性與正確性，並將之推廣。在「一、數學威力」的圓面積的例子，也是學生展現解題性知識的表現。又如，學生能正確解答並瞭解「小明比小華多吃 $\frac{1}{2}$ 條巧克力，小明比小英少吃 $\frac{1}{3}$ 條巧克力，小英和小華誰吃得多？多多少？」的問題。

本書同樣認為學生數學能力的培養不是短暫時間內可以達成，它需要持久的進行。同時，最好也能在班級的數學教學過程中持續進行，而不是獨立於正規的數學內容教學之外進行。

### 三、數學內容

數學威力與數學能力都和數學內容知識息息相關。數學內容知識涵蓋數感、性質與運算、測量、幾何與空間、資料分析、統計與機率，以及代數與函數等。我國九年一貫能力指標所涵蓋的數學內容則分為數與量、幾何、統計與機率、代數等四大主題。臺灣小學階段，數與量的學習內容占這四大主題的一半以上的份量，數的部分又可分成自然數、分數和小數三大部分。分數和小數這兩部分和自然數最大的不同在於分數和小數都涉及兩個量的相對比較，由於分數與小數有這個共同點，彼此關係密切，又是小學階段非常重要的學習內容，因此，本書將以分數與小數為主題來介紹相關的內容、學習、教學與評量的理論與實務。

#### 第二節

### 分數與小數相關名詞解釋

#### 一、分數概念名詞解釋

在分數概念中，有一些常用的專有名詞，現羅列於下一一說明並各舉一示例。

##### 1. 分數與單位量

將一個量（例如：一個蛋糕、10個雞蛋）等分成幾塊或幾堆，其中的一部分和原來的量相比較就形成分數，「原來的量」就稱為單位量。例如：將一個蛋糕平分成3塊，其中的2塊占這個蛋糕的 $\frac{2}{3}$ ， $\frac{2}{3}$ 是一個分數，「一個蛋糕」是這一題的單位量。

##### 2. 分子

分數符號中放在上面的那個數。例如：分數符號 $\frac{2}{3}$ 的分子是2。

### 3.分母

分數符號中放在下面的那個數。例如：分數符號 $\frac{2}{3}$ 的分子是3。

### 4.單位分數

分母是大於1的正整數，而且分子是1，這樣的分數被稱作單位分數。

例如： $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{4}$ 。

### 5.真分數

分子比分母小的分數，稱為真分數。例如： $\frac{8}{12}$ 、 $\frac{3}{4}$ 。

### 6.假分數

分子比分母大或相等的分數，稱為假分數。例如： $\frac{7}{5}$ 、 $\frac{3}{3}$ 。

### 7.帶分數

一個分數含有整數和真分數兩部分，稱為帶分數。例如： $2\frac{3}{4}$ ，它也就是 $2 + \frac{3}{4}$ 。

### 8.等值分數

獲得等值分數的方法有兩種，一種是將原來的分數所分割的塊數，多塊看成一份即得到新的分數，由於新分數和原分數的值相等，因此新分數稱為原分數的等值分數。例如： $\frac{8}{12}$ 可解釋成一個蛋糕平分成12塊，其中的8塊即占這個蛋糕的 $\frac{8}{12}$ 。現在我們將2塊看成1份，那麼全部的12塊就是6份，8塊就是4份，所以， $\frac{4}{6}$ 和 $\frac{8}{12}$ 等值， $\frac{4}{6}$ 是 $\frac{8}{12}$ 的等值分數。如果我們將4塊看成1份，則可以得到 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{8}{12}$ 等值。獲得等值分數的另一種方法是將

原來的分數所分割的塊數，每一塊再平分成多塊，即得到新的分數。同樣的，由於新分數和原分數的值相等，因此新分數稱為原分數的等值分數。

再以 $\frac{8}{12}$ 為例，如果我們將每一塊再平分成2小塊，則全部的12塊就變成24小塊，8塊就變成16小塊，所以， $\frac{16}{24}$ 和 $\frac{8}{12}$ 等值。如果我們將 $\frac{8}{12}$ 的每一塊再平分成3小塊，則可以得到 $\frac{24}{36}$ 和 $\frac{8}{12}$ 等值。

### 9.約分

獲得等值分數的第一種方法（將多塊看成一份）即為約分。如果以運算的角度來看，就是一分數的分子、分母同除以一個公因數。一個分數約分之後的值不變。例如： $\frac{8}{12} = \frac{8/2}{12/2} = \frac{4}{6}$ （分母的12和分子的8除以共同的因數2）， $\frac{8}{12} = \frac{8/4}{12/4} = \frac{2}{3}$ （分母的12和分子的8除以共同的因數4）， $\frac{4}{6}$ 和 $\frac{2}{3}$ 都是 $\frac{8}{12}$ 約分的結果，可以寫成： $\frac{8}{12} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ 。

### 10.擴分

獲得等值分數的第二種方法（將每一塊再平分成多塊）即為擴分。如果以運算的角度來看，就是一分數的分子、分母同乘以一個正整數。一個分數可以有無限多個擴分之後的分數，但擴分之後的值不變。例如： $\frac{8}{12} = \frac{8 \times 2}{12 \times 2} = \frac{16}{24}$ （分母的12和分子的8同乘以正整數2）， $\frac{8}{12} = \frac{8 \times 3}{12 \times 3} = \frac{24}{36}$ （分母的12和分子的8同乘以正整數3）， $\frac{8}{12} = \frac{8 \times 4}{12 \times 4} = \frac{32}{48}$ （分母的12和分子的8同乘以正整數4）。 $\frac{16}{24}$ 、 $\frac{24}{36}$ 、 $\frac{32}{48}$ 都是 $\frac{8}{12}$ 擴分的結果，可以寫成： $\frac{8}{12} = \frac{16}{24} = \frac{24}{36} = \frac{32}{48} = \dots\dots$ 。

### 11.通分

利用約分或擴分將兩異分母的分數，變成兩同分母之等值分數。例如：解  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$  時，利用擴分將  $\frac{1}{2}$  和  $\frac{1}{3}$  變成同分母的  $\frac{3}{6}$  和  $\frac{2}{6}$  即可進一步相加。將異分母的  $\frac{1}{2}$  和  $\frac{1}{3}$  變成同分母的  $\frac{3}{6}$  和  $\frac{2}{6}$ ，即為通分的表現。

### 12.最簡分數

一分數經化簡後（合併符號、約分），若分子與分母已經沒有大於1的公因數（分子、分母互質），此分數稱為最簡分數。例如： $1\frac{3}{16} + 2\frac{5}{16} = 3\frac{8}{16} = 3\frac{1}{2}$ ，得到的結果為  $3\frac{8}{16}$ ，經過化簡（約分）之後變成  $3\frac{1}{2}$ ， $3\frac{1}{2}$  的分母和分子已經沒有大於1的公因數可再約分， $3\frac{1}{2}$  就是最簡分數。

## 二、小數概念名詞解釋

在小數概念中，有一些常用的專有名詞，茲將其羅列於下並逐一說明。

### 1.小數

以10為底的記數系統所表記的非整數，稱為小數，可分成整數部分和非整數部分。例如：23.58，其中整數部分為「23」，表示  $2 \times 10^1 + 3 \times 10^0$ ，而非整數部分（或稱小數部分）為「58」，表示  $5 \times 10^{-1} + 8 \times 10^{-2}$  或  $\frac{5}{10} + \frac{8}{100}$ 。小數的出現代表十進位記數系統由整數擴展到非整數。

### 2.小數點

在小數記法中，用以區隔整數部分與非整數部分的記號，稱為小數點。此記號因國家而異，我國以小黑點「.»來表示，例如：0.3、2.45；而有些國家是以逗點「,」來表示，例如：0,3、2,45。