

1 單利和單利貼現

1.1 單 利 (Simple Interest)

假設某投資者借給你一筆錢，於合約到期時，你必須償還這筆錢和使用這筆錢的代價，即所謂的利息（Interest）。以投資者的觀點，利息是投資這筆錢（或本錢）所賺取的收入。原始本錢的投入叫作本金，而本金和利息的加總即稱為終值（Future Value）。衍生出之金額占本金之比例稱為利率，即在某一單位時間，從本金所賺取到利息的比例。

早期，借貸本金和利息的償付部分是有形物品（例如穀類）。但現在通常以「錢」的形式表示。而以本金賺取利息的慣例早被記錄在人類史裡，並陳列在巴比倫教條檔案中，至今已超過四千年之久。

使用單利的方法，貸款最終日的應付利息是基於原始本金、貸款期限和利息的比例來計算。

為了計算這些結果，須使用以下的標記：

2 財務數學

P = 表本金或 S 的現值

I = 單利的總值

S = 終值或 P 的到期值（或本利和）

r = 每期利息的利率（通常以年計算）

t = 每期的時間（通常以年計算）

單利之計算公式：

$$I = P \cdot r \cdot t \quad (1)$$

而對 S 總數的定義為：

$$S = P + I$$

套用 $I = P \cdot r \cdot t$ ，我們就 P 、 r 和 t 而言， S 得：

$$S = P + P \cdot r \cdot t$$

$$S = P(1 + rt) \quad (2)$$

在公式(2)的 $(1 + rt)$ 被稱為單利因子，而從公式(2)以 P 本金計算 S 的計算過程被稱為單利的累積。從公式(2)我們也可得知：

$$P = \frac{S}{1 + rt} = S(1 + rt)^{-1} \quad (3)$$

我們稱 P 為現值（Present Value，簡稱 PV ）或 S 的貼現值。在公式(3)的 $(1 + rt)^{-1}$ 被稱為現值在單利的貼現因子。在 1.3 節內，我們將更詳細地探索現值的問題。

在採用年利率時，時間 t 須以年計算。既然如此，當時間條件為月份時，則須換算為：

$$t = \frac{\text{月數}}{12}$$

且，當時間條件是天數時，則換算為：

$$t = \frac{\text{天數}}{365}$$

我們還必須注意到一些國際商業的處置慣例，如有些是以1年360天（並非365天）來估計。澳洲慣例係以1年365天來計算。台灣之股市、債市、外匯市場之應用，亦統一用365天計算，或辦理交割結算。

範例 1 試求出一筆貸款90天，本金\$500，年利率8.5%的單利計息有多少？

解：已知 $P=500$ ， $r=0.085$ ，時間=90天，單利計息

$$\begin{aligned} I &= 500 \times 0.085 \times \frac{90}{365} \\ &= \$10.48 \end{aligned}$$

範例 2 一對夫妻借了\$10,000，每個月的利率是1%。已知其每月須償付\$210，則其第1次的付款中有多少是用來支付利息，又，其另償付了多少的貸款本金？

解：已知 $P=10,000$ ， $r=0.01$ ， $t=1$ 且

$$\begin{aligned} I &= 10,000 \times 0.01 \times 1 \\ &= \$100 \end{aligned}$$

4 財務數學

故第 1 個月支付的利息是\$100，即另\$110 是用來償付貸款。
 注意：在這個例題是以月來計算，而非年計。故我們採用
 題目原本給訂的利率，是因為這題原本就以月份來表示。

範例 3 一個放高利貸者制訂了一貸款\$100，到月底就必須償還\$120。試問其單利的年利率是多少？

解：已知 $P=100$ ， $I=20$ ， $t=\frac{1}{12}$

$$\begin{aligned} r &= \frac{I}{P \cdot t} \\ &= \frac{20}{100 \times \frac{1}{12}} \\ &= 2.40 \text{ 或 } 240\% \text{ (按年計)} \end{aligned}$$

範例 4 某人借了錢，60 天之後剛好須償還\$200。如果這筆償款\$200 包括本金和單利為 9%（按年計），則此人共借了多少錢？

解：已知 $S=200$ ， $r=0.09$ ， $t=\frac{60}{365}$ 套用公式(3)得：

$$\begin{aligned} P &= \frac{200}{1 + 0.09(\frac{60}{365})} \\ &= \$197.08 \end{aligned}$$

範例 5 問須多久才可用\$3,000 去賺取\$60 的利息，利率為 6%（按年計）？

解：已知 $P=3,000$ ， $I=60$ ， $r=0.06$ ，

$$t = \frac{I}{P \cdot r} = \frac{60}{3,000 \times 0.06}$$

$$= \frac{1}{3}, \text{或曰 } 4 \text{ 個月}$$

在時間和日期之間

在計算單利時，很重要的一點是必須準確的計測天數。基於這點，我們把借錢的當天計算在內（或儲存日），但是不包括還錢的當天（或提取日）即算頭日不算尾日。有一個簡單的方法來決定天數，就是請參照附錄 E 指示。這個表實際上是一個行事曆，提供一年中天數的排列順序。這些準確的時間與所提供的天數的順序有所差異。在閏年，這些天數的順序將會在 2 月 28 日之後增加 1 天。

如果這個表無法使用時，則另一個代替的方法就是列出每個有關聯的月份和包括執行的那個月的天數。這些數據的陳列加總後，即可以提供所要求的答案。

範例 6 試找出 3 月 15 日到 9 月 3 日的計息天數。

解：(a)從附錄 E 可得，3 月 15 日是 1 年中的第 74 天，而 9 月 3 日是 1 年中的第 246 天，所以天數是 $246 - 74 = 172$ 天。
(b)直接加算。

月份	天數
3 月	17 (包括 3 月 15 日) (註： $31 - 15 + 1 = 17$)
4 月	30
5 月	31
6 月	30
7 月	31
8 月	31
9 月	2 (不包括 9 月 3 日)
總數	172

範例 7 在 2001 年 11 月 3 日，一名婦女借了 \$500，單利為 9%（按年計）。這筆債將在 2002 年 2 月 8 日償還，試求出其應償還的單利？

解：天數 = $39 + 365 - 307$
 $= 97$

365 天是額外加進去，因為 2 月 8 日是 11 月 3 日的隔年。

$$I = 500 \times 0.09 \times \frac{97}{365}$$

$$= \$11.96$$

練習題 1.1

1. 一筆 \$500，單利為 11%（按年計），並超過 60 天的款項，試求其終值？
2. 花 2.5 年時間將 \$1,000 累積成 \$1,420，則其單利率應該是多少？
3. 將 \$500 累積成 \$560，單利為 12%（按年計），則其須花多少時間？
4. 一筆款項為 \$5,000，90 天期限，年利率為 10.5%，求其單利？
5. 一個學生借了 \$10 給他朋友，期限為 1 個月。到了月底，這名學生向其友索賠 \$10，外加一條價值 50¢ 的巧克力，問其隱含的單利率為多少？
6. 試問本金該為多少？才能在期限為 6 個月，單利率為 9%（按年計）的條件下，累積到 \$5,100？
7. 試問本金為多少？才能在期限為 120 天，單利率為 18%（按年計）的條件下，累積到 \$580？
8. 一筆 \$1,000 款項，計息 65 天，單利為 11.5%（按年計），試求其終值（本利和）？
9. 一筆 \$600 款項，計息 118 天，單利為 16%（按年計），試求其利息？
10. 某人借了一筆 \$1,000，期限為 220 天，單利為 17%（按年計）的款項，問其最終須償還多少錢？

11. 一筆\$500 款項，計息 82 天，單利為 9%（按年計），試求其現值？
12. 一筆\$100 款項，其到期日為 3 個月，單利為 11%（按年計），試求其現值？
13. 試求出從 4 月 18 日至同年之 11 月 3 日的計息天數？
14. 試求出從 10 月 2 日至隔年之 6 月 15 日的計息天數？
15. 在 2001 年 4 月 7 日，X 先生借了一筆\$1,000 的款項，年利率為 8%，且其將在 2009 年 11 月 22 日償還。試求出其須償付的單利？
16. 一筆款項\$2,000 從 5 月 18 日投資至隔年之 4 月 8 日，單利為 16%（按年計）。試計出其賺取的利息總額？

1.2 銀行的利息支付

銀行對很多客戶、建築業團體和信用合作社均利用每個月，戶頭裡最小的月結餘來計算單利。這意味著一筆存款和在同一个月份裡提取的款項將不會產生任何利息，而計算利息時只是根據每個月戶頭裡月結餘金額。

範例 1 以下是某銀行帳戶歷年的交易情形：

日期	存入	提取	結餘
	—	—	\$200
2 月 21 日	\$300	—	\$500
4 月 3 日	—	\$200	\$300
6 月 5 日	\$600	—	\$900
6 月 19 日	—	\$300	\$600
10 月 2 日	\$200	—	\$800
10 月 28 日	—	\$400	\$400

若利率為 4%（按年計），請計算出 12 月 31 日到期的應付最小月結餘的利息。

解：最小的月結餘為：

月份	最小月結餘
1 月	\$200
2 月	\$200
3 月	\$500
4 月	\$300
5 月	\$300
6 月	\$300
7 月	\$600
8 月	\$600
9 月	\$600
10 月	\$400
11 月	\$400
12 月	\$400
總計	\$4800

$$I = 4800 \times 0.04 \times \frac{1}{12}$$

$$= \$16.00$$

採 $\frac{1}{12}$ 是因為利率是以年計算，但是最小的月結餘是以每個月計算。

用最小的月結餘來計算每個帳戶的利息償付，可以清楚地表明銀行的計息立場，即投資者的存款總數和該月份或下月份所提取錢將無法計算利息。

另一個相近的替代方法，是用帳戶每一天的結餘來計算利息。用這個替代方法會使一投資者賺取天數的利息。

但這種計算方式比較複雜，因為其在每次的存款或提取後都有不同的結餘。如果利率相同，則採用每天計算利息的方法，其利息將會比採用每個月最小月結餘的方法來得高。

範例 2 下列交易是一年的銀行戶頭帳目：

日期	存入	提取	結餘
2 月 15 日	\$400	—	\$400
5 月 7 日	\$200	—	\$600
5 月 23 日	—	\$300	\$300
11 月 12 日	—	\$100	\$200
12 月 23 日	\$500	—	\$700

試以每天結餘的方式計算利率為 3%（按年計），12 月 31 日到期的利息。

解：

結餘	天數	
\$400	14 + 31 + 30 + 6	= 81
\$600	16	= 16
\$300	9 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 11	= 173
\$200	19 + 22	= 41
\$700	9	= 9

$$I = \frac{(400 \times 81) + (600 \times 16) + (300 \times 173) + (200 \times 41) + (700 \times 9)}{365} \times 0.03$$

$$= \$6.51$$

練習題 1.2

- 某銀行的儲蓄利率為 10%（按年計），利息計算方式是一年分四季，即 3 月 31 日、6 月 30 日、9 月 30 日和 12 月 31 日，並以每季的最小結餘來計算。如果一個人在 1 月 1 日開戶並存了 \$200，又在 8 月 8 日提取了 \$100，則其在第 1 年賺了多少的利息？
- X 小姐有一個年利率為 4% 的儲蓄帳戶，其銀行是在每年 12 月 31

10 財務數學

日支付利息。下列為其 1 月 1 日後的開戶事項，試求出第 1 年賺得的利息。假設：(a)以每個月最小的月結餘計利息；(b)每天的結餘已知。

日期	存入	提取	結餘
1 月 1 日	\$100	—	\$100
2 月 3 日	\$200	—	\$300
4 月 14 日	—	\$150	\$150
5 月 18 日	\$300	—	\$450
7 月 7 日	—	\$200	\$250
9 月 15 日	—	\$150	\$100
11 月 3 日	\$100	—	\$200

3. 一領年金者於 6 月 30 日在信用合作社開了一個帳戶，假設每月最小結餘的應付利率為 6%（按年計），請依下列交易業務計算出下一會計年度（即是該年 7 月到隔年 6 月）的到期利息。

日期	存入	提取	結餘
6 月 30 日	\$250	—	\$250
8 月 15 日	\$300	—	\$550
9 月 13 日	\$300	—	\$850
10 月 25 日	—	\$250	\$600
12 月 2 日	—	\$300	\$300
3 月 18 日	\$200	—	\$500

4. 再依上題的答案以每天結餘的方式計算出其利息。
5. 若第 4 題問題的利息和第 3 題一樣，試問其利率。

1.3 現 值

單利的現值

在 1.1 節， S 的現值（或貼現值）是借用現值在單利因子的換算。這是澳洲通常求商業單據的現值（或價格）之試算方式法案，其必有一個固定的到期幣值和固定的到期日。通常到期