定義 1–1. 集合

定義 1-1-1.

『集合』$\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$由一些東西組成的團體

『東西』可能是『數字、橘子、人、動物、日期、重量、社團、行星、……』

⊙ 通常用『大寫英文字母』 $A, B, C, \cdots, X, Y, Z$ 來代表集合

⊙ 集合描述法：有『敘述法（Oral）』、『表列法（Listing）』及『集合構造法（Set-buildering）』等三種。

⊙ 『最小集合』$\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$『空集合（empty set）』$\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ 沒有組成物的集合 $\overset{\text{記為}}{\Leftrightarrow}\phi$

⊙ 『最大集合』$\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$『宇集合（universal set）』$\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ 討論主題的『最大適用範圍』$\overset{\text{記為}}{\Leftrightarrow}$ U

歐吉桑的補充說明

■ 敘述法：用語言或文字描寫集合組成物。

■ 表列法：把集合組成物逐項列出，再用大括號 { } 把集合組成物全部圍起來。

■ 集合構造法：以 $\{x \mid x$ 滿足 $P\}$，其中 P 為集合組成物的共同特徵敘述。

集合構造法的『P』，其實就是『集合』的『元素』過濾器或篩選器！亦即：一個 x 只要能通過『P』的過濾、篩選，就（必）是『集合的元素』

例

A = 不大於 10 的非負偶數集合　敘述法

$= \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$　表列法

$= \{x \mid x = 2n, 0 \le n \le 5,$ 且 n 是整數$\}$　集合構造法

例

ϕ = 沒有組成物的集合　敘述法

$= \{\ \}$　表列法

$= \{x \mid x \neq x\}$　集合構造法

例

討論台灣全民健保問題時，『所有台灣國民』即為此問題的『宇集合』

定義 1-1-2.

a 是 A 的**『元素（element）』** $\overset{\text{讀作}}{\Leftrightarrow}$ a**『屬於（belong to）』** A

$\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ a 是 A 的**『組成物』**或 A **『含（contain）』** a $\overset{\text{記為}}{\Leftrightarrow}$ $a \in A$

⊙ a 不是 A 的**『元素』** $\overset{\text{讀作}}{\Leftrightarrow}$ a**『不屬於』** A

$\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ a 不是 A 的**『組成物』**或 A**『不含』** $\overset{\text{記為}}{\Leftrightarrow}$ $a \notin A$

⊙ 通常用**『小寫英文字母』** $a, b, c \cdots\cdots x, y, \cdots\cdots$來代表元素

⊙ 有限個元素的集合 A，它的 $n(A) \overset{\text{定義}}{=}$ 集合 A 的元素個數

例

$A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$的『元素』有『$0, 2, 4, 6, 8, 10$』

也可以記爲：$0, 2, 4, 6, 8, 10 \in A$

且 $n(A) = 6$（A 集合有 6 個元素）

定義 1-1-3.

A 是 B 的**『子集合（subset）』**

$\overset{\text{讀作}}{\Leftrightarrow}$ A**『包含於（is contained in）』** B

$\overset{\text{讀作}}{\Leftrightarrow}$ B**『包含（contain）』** A

$\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ 『$A = \phi$』或『$\forall\ a \in A \overset{\text{可推得}}{\Rightarrow} a \in B$』

亦即：規定：**『Empty set ϕ 是任意 set 的 subset』**

$\overset{\text{記為}}{\Leftrightarrow}$ $A \subseteq B$

⊙ A 不是 B 的**『子集合』**

$\overset{\text{讀作}}{\Leftrightarrow}$ A**『不包含於』** B

$\overset{\text{讀作}}{\Leftrightarrow}$ B**『不包含』** A

$\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ 『$A \neq \phi$』且『$\exists\ a \in A,\ a \notin B$』

$\overset{\text{記為}}{\Leftrightarrow}$ $A \not\subset B$

⊙ A 跟 B『**相等（equal）**』

$\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ 『$A=\phi$ 且 $B=\phi$』 或 『A 跟 B 有相同的 elements』

$\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$

$\overset{\text{記為}}{\Leftrightarrow}$ $A=B$

亦即：兩集合相等 $\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ 兩集合相互包含

⊙ A 是 B 的『**真子集（proper subset）**』

$\overset{\text{定義}}{=}A\subseteq B$ 且 $A\neq B$

$\overset{\text{改為}}{=}$ $A\subset B$ 或 $A\subsetneq B$

亦即：由 B 的所有『子集合』所組成的新集合～2^B 以 B 的『子集合』當『元素』！

⊙ B 的『**冪集合（power set）**』

$\overset{\text{定義}}{=}$ $\mathbb{P}(B)\overset{\text{記為}}{=}2^B\overset{\text{令}}{=}\{A\,|\,A\subseteq B\}$

亦即：數學也允許『集合』也可以當『另一個集合』的『元素』～如：數學系的學生是數學系這個『集合』的『元素』，但數學系這個『集合』卻也是數學系所屬『大學』的一個『元素』

例

設 $B=\{1,2,3\}$，則 $\mathbb{P}(B)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

且 $n(B)=3$，$n(2^B)=n(\mathbb{P}(B))=8=2^3=2^{n(B)}$

歐吉桑的補充說明

■ 規定：『**Empty set ϕ 是任意 set 的 subset**』是爲了使『**某些數學的發展更完備**』！

『**屬於／不屬於**』是一種『**個體（元素）與團體（集合）**』的『**關係描述詞**』

『**包含／不包含**』是一種『**團體（集合）與團體（集合）**』的『**關係描述詞**』

帶有『**集合代號 { }**』的『**符號**』，如：$\{a,1\}$

除了可以視爲『**集合**』外，如：$\{a,1\}$ 是含 $a,1$ 兩個 element 的 set

也可以把『**集合代號 { }**』視爲該『**符號**』～『**不可分割**』的一部分！

亦即：連同『**集合代號 { }**』，把整個『**符號**』視爲一個『**單一元素**』！

如：視 $\{a,1\}$ 是一個形狀是 $\{a,1\}$ 的單一 element

例

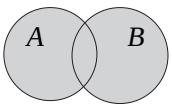
設 $A=\{1,a,\{1\},\{a\},\{1,a\},2\}$，則可知：

(1) $1\in A$　　(2) $a\in\{a\}$　　(3) $\{1\}\in A$ 或 $\{1\}\subseteq A$

(4) $\{1,\{a\}\}\notin A$ 或 $\{1,\{a\}\}\subseteq A$　　(5) $\{2,\{2\}\}\notin A$ 或 $\{2,\{2\}\}\not\subset A$

定義 1-1-4.

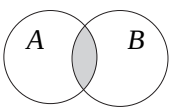
A 跟 B 的『聯集（union）』 $\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} A\cup B \overset{\text{含}}{=} \{x\,|\,x\in A$ 或 $x\in B\}$



『聯集』相當於邏輯上的『或』

定義 1-1-5.

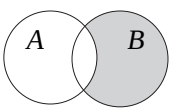
A 跟 B 的『交集（intersection）』 $\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} A\cap B \overset{\text{含}}{=} \{x\,|\,x\in A$ 且 $x\in B\}$



『交集』相當於邏輯上的『且』

定義 1-1-6.

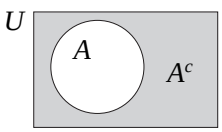
A 對應於 B 的『差集（difference）』 $\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} B-A \overset{\text{含}}{=} \{x\,|\,x\in B$，但 $x\notin A\}$



定義 1-1-7.

由『$B-A$ 及 A^c』定義可知：$B-A=B\cap(A^c)$

A 的『補集（complement）』 $\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} A^c \overset{\text{含}}{=} U-A$



『補集』相當於邏輯上的『否定』

若 U 不同，則 A^c 也跟著不同！

～～～ 如：對 $=\{1\}$

- 若 $U=\{1,2\}$，則 $A^c=\{2\}$；
- 若 $U=\{1,2,3\}$，則 $A^c=\{2,3\}$

定義 1-1-8.

A 跟 B『互斥（disjoint）』 $\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} A\cap B=\phi$

$A\cap B=\phi \overset{\text{讀作}}{\Leftrightarrow}$ A 跟 B『交集為 ϕ』

～～～ 不能讀作：A 跟 B『沒有相交』或『沒有交集』

例

若 $A \overset{\text{令}}{=} \{1,2,3\}$，$B \overset{\text{令}}{=} \{2,4\}$，$C \overset{\text{令}}{=} \{5,7\}$ 且 $U \overset{\text{令}}{=} \{x \mid x \text{ 為 1 到 8 的整數}\}$，則可得知：

(1) $A\cup B=\{1,2,3,4\}$

(2) $A\cap B=\{2\}$

(3) $B-A=\{4\}$

(4) $A-B=\{1,3\}$

(5) $A^c=\{4,5,6,7,8\}$

(6) $B^c=\{1,3,5,6,7,8\}$

(7) $A\cap C=B\cap C=\phi$ 亦即：A 跟 C『互斥』且 B 跟 C『互斥』

例

設 $n(A)=m\le l=n(B)$，試求：

$n(A\cup B)$、$n(A\cap B)$、$n(A-B)$、$n(B-A)$ 的最大值跟最小值

Sol

將集合 A 跟 B 的『交聯圖』

作極端的『合併與分離』，即可得如下的解～

$n(A\cup B)$：最大值 $=m+l$

，最小值 $=l$

$n(A\cap B)$：最大值 $=m$

，最小值 $=0$

$n(A-B)$：最大值 $=m$

，最小值 $=0$

$n(B-A)$：最大值 $=l$

，最小值 $=l-m$

定義 1–2．序對

定義 1-2-1.

『序對（order pair）』 (a,b)

$\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ $(a,b)\overset{\text{令}}{=}$ 集合$\{\{a\},\{a,b\}\}$ ← 用『集合』來定義『序對』

特徵：第一位元素單獨放！

⊙ 稱 a 是 (a,b) 的**『第一位元素（the first element）』**及稱 b 是 (a,b) 的**『第二位元素（the second element）』**

⊙ 序對 (a,b) 跟 (c,d) 相等 $\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ $a=c$ 且 $b=d$ $\overset{\text{記為}}{\Leftrightarrow}$ $(a,b)=(c,d)$

亦即：(a,b) 跟 (c,d) 的『第一位元素』跟『第二位元素』分別相等！

定義 1-2-2.

A 跟 B 的**『卡氏積集（Cartesian product）』** $\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ $A\times B\overset{\text{令}}{=}\{(a,b)\,|\,a\in A \text{ 且 } b\in B\}$

可以推廣成：$A^m=\underbrace{A\times A\times A\cdots A}_{m\text{ 個}}$

例

序對 (1, 2) 的集合表示式為 $\{\{1\},\{1,2\}\}$ ← 第一位元素單獨放！

例

已知序對 $(a,2)=(1,3a^2+b)$，試求 (a,b)

Sol

$\because(a,2)=(1,3a^2+b)$ ← $(a,2)$ 跟 $(1,3a^2+b)$ 的『第一位元素』跟『第二位元素』分別相等！

$\therefore a=1$ 且 $2=3a^2+b$

$\therefore b=2-3a^2=2-3=-1$

$\therefore(a,b)=(1,-1)\overset{\text{也可寫成}}{=}\{\{1\},\{1,-1\}\}$

例

若 $A\overset{\text{令}}{=}\{a,b,3\}$ 且 $B\overset{\text{令}}{=}\{2,4\}$，則可得知：

$A\times B=\{(a,2),(a,4),(b,2),(b,4),(3,2),(3,4)\}$

定義 1–3. 函數或映射

定義 1-3-1.

f 是一個『**函數（function）**』或『**映射（mapping）**』

$\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ f 是一個由『**一些**』『**第一位元素**』都『**不相同**』的『**序對**』所組成的『**集合**』。

亦即：『若 $(x,y_1),(x,y_2)\in f$，則 $y_1=y_2$』（用『序對所成集合』來定義『函數』）！

⊙ 稱 $D_f \overset{\text{定義}}{=} \{x\,|\,(x,y)\in f\}$ 是函數 f 的『**定義域（domain）**』

由所有『序對』的『**（必定相異）第一位元素**』所成集合

⊙ 稱 $x\in D_f$ 是函數 f 的『**變數（variable）**』

『定義域』裡的元素

⊙ 稱 $R_f \overset{\text{定義}}{=} \{y\,|\,(x,y)\in f\}$ 是函數 f 的『**值域（range）**』

由所有『序對』的『**（可能不盡相異）第二位元素**』所成集合

⊙ 稱 $y\in R_f$ 是函數 f 在 x 處的『**函數值（value）**』

跟『變數 x』配成『序對』的『第二位元素』

⊙ 我們也常用『$y=f(x)$』取代『$(x,y)\in f$』，並轉換『**函數的定義**』變成如下說法：

$f: D_f \to CoD_f$ 是一個『**由 D_f 映射到 CoD_f**』的函數

$\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ 對每一個給定的 $x\in D_f$，都『**存在唯一**』的 $y\in CoD_f$ 滿足 $y=f(x)$

亦即：視『f』爲可以把『原料 x』轉化爲『（實際）成品 $f(x)$』的機器

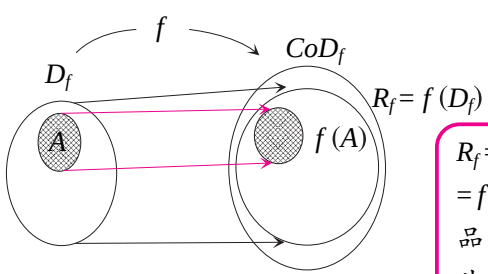
⊙ 稱『**包含**』 R_f 的集合 CoD_f 是函數 f 的『**對應域（co-domain）**』

由 A 這個原料集合，借助 f 這台機器所『生成』的成品集合

⊙ 稱 $f(A) \overset{\text{含}}{=} \{y\in CoD_f\,|\,$存在 $x\in A$ 滿足 $y=f(x)\} = \boxed{\{f(x)\,|\,x\in A\}}$ 是函數 f 在 A 上的『**映射集（image）**』，其中 $A\subseteq D_f$

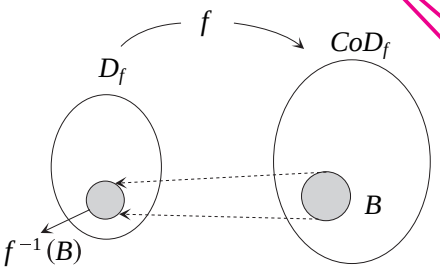
但後面這個定義 $\{f(x)\,|\,x\in A\}$ 在證明某些性質比較容易『犯錯』，所以在處理證明時，避免用它！

～～～ 特殊狀況：$f(D_f)=R_f$



R_f = 可以由 f 這台機器『實際生產出來』的成品集合，而 CoD_f = f 這台機器在設計初始，設計者『預估可以生產出來』的成品集合～但由於，經常有『理想與現實』狀況的落差。因此，CoD_f 除了有 f 可以『實際生產出來』的成品外，也可能含有許多『無法由 f 實際生產出來』的『預估但虛擬的產品』

⊙ 稱 $f^{-1}(B) \overset{\text{定義}}{=} \{x \in D_f \mid f(x) \in B\}$ 是函數 f 對應 B 的『**反映射集（inverse image）**』，其中 $B \subseteq CoD_f$



特殊狀況：$f^{-1}(R_f) = f^{-1}(CoD_f) = D_f$

當然可能『有些 B 裡的元素』，由於他們不是由『f 實際生產出來』的東西，所以也無法由『f^{-1} 進行實際原料的回收』！

由 B 這個成品集合的成品，所『回收』的原料集合

⊙ functions f 跟 g 『**相等（equal）**』

$\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ f 跟 g 滿足：

定義域跟對應域分別相等

⑴ $D_f = D_g$ 且 $CoD_f = CoD_g$

對應關係式也到處相等

⑵ $f(x) = g(x)$，$\forall\, x \in D_f = D_g$

例

x、y 兩變數的關係如下，何者 y 不是 x 的函數？

⑴	x	1	2	3	4	⑵	x	1	2	3	1	⑶	x	-1	0	1	2	⑷	x	1	2	3	4
	y	0	0	0	0		y	-1	3	4	0		y	-1	0	2	5		y	3	5	7	9

Sol

利用函數不允許『一個 x 對應多個 y』來解題！

⑴ ∵沒有發生『一個 x 對應多個 y』的現象　　∴為函數

⑵ ∵$x = 1$ 同時對應 $y = -1$ 及 $y = 0$，不符函數要求　　∴不為函數

⑶ ∵沒有發生『一個 x 對應多個 y』的現象　　∴為函數

⑷ ∵沒有發生『一個 x 對應多個 y』的現象　　∴為函數

例

設 $A \overset{\text{定義}}{=} \{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N}$, $B \overset{\text{定義}}{=} \{-1, 0, 4, 5\} \subseteq \mathbb{R}$ 且函數 $f : A \to \mathbb{R}$ 的對應關係是 $f(n) = n^2 + 1$，則可得知：

⑴ ∵$f(1) = 1^2 + 1 = 2$, $f(2) = 2^2 + 1 = 5$, $f(3) = 3^2 + 1 = 10$

∴$f(A) = \{2, 5, 10\}$

⑵∵只有 $f(2)=2^2+1=5\in B$

$\therefore f^{-1}(B)=\{2\}$

在 A 裡找不到 n 滿足：$f(n)=-1,0,4$
～ 亦即：B 的 $-1,0,4$ 對 $f^{-1}(B)$ 沒有產出元素的效果
（因爲 B 的 $-1,0,4$ 並非可以用 f 製造出來的實際產品，所以，無法由 f^{-1} 進行原料的有效回收）

令 $n^2+1=-1,0,4$
$\Rightarrow n$ 無正整數解

例

設 $f(x)=3^x-7x$，求 $f(0)+f(1)+f(2)+\cdots\cdots+f(8)=?$

Sol

$\because f(0)=3^0-7\times 0$ 相同位置、等量代換

$f(1)=3^1-7\times 1$

$f(2)=3^2-7\times 2$

$\vdots$

$f(8)=3^8-7\times 8$

$\therefore f(0)+f(1)+f(2)+\cdots\cdots f(8)$

$=(3^0+3^1+3^2+\cdots\cdots 3^8)-7\times(0+1+2+3+\cdots\cdots+8)$

$=\dfrac{3^0\times(1-3^9)}{1-3}-7\times\dfrac{9\times(0+8)}{2}$

『等比級數和』公式：$S_n=\dfrac{a_1\times(1-r^n)}{1-r}$
～ 留意：共有『9』項喔！

$=\left(\dfrac{3^9-1}{2}\right)-252$

$=\left(\dfrac{19683-1}{2}\right)-252$

$=9841-252$

$=9589$

∵ $f(A)=\{2,5,10\}$
∴「B裡面只有 5」在 $f(A)$
（亦即：有「A 裡的元素」會跟「5」對應！）
∴ $f^{-1}(B)$只能回收「生產出 5」的「A 集合原料 2」

歐吉桑的補充說明

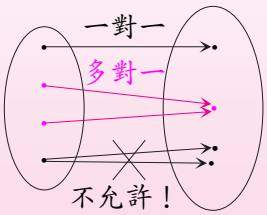
但是：『對應域』的『元素』，卻不見得『都要』跟『定義域』的某個元素『對應』

■函數要件：

⑴『定義域』的『每一個元素』都要在『對應域』裡『有指定的對應元素』

⑵不可以『一對多』

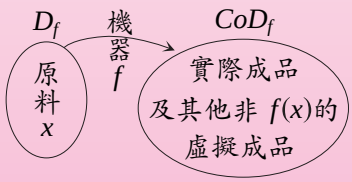
亦即：『函數』允許『一對一』或『多對一』！～ 因此，我們通常把『定義域』的『元素』視爲『球』而把『對應域』的『元素』視爲『可以裝不只一個球的箱子』！



（不可以：『一對多』）

■『函數 $f:D_f\to CoD_f$』可以看成是：

一台把『D_f 裡的原料 x』變成『CoD_f 裡的某個（單一）成品 $f(x)$』的『轉換機器』

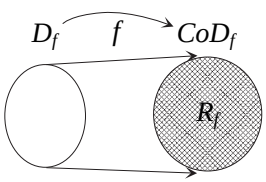


定義 1-3-2. 特殊函數

⊙ $f:D_f\to CoD_f$ 是『映成或蓋射（onto 或 surjective）』function

$\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ $R_f=CoD_f$

值域＝對應域 ～ 亦即：『每一個 $y\in CoD_f$，必存在 $x\in D_f$ 滿足 $y=f(x)$』

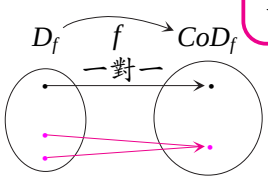


亦即：『函數值』會『充滿或覆蓋』整個『對應域』！

⊙ $f:D_f\to CoD_f$ 是『一對一或嵌射（one-to-one 或 injective）』function

$\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ 滿足：$\forall\, x_1,x_2\in D_f$，『$f(x_1)\overset{\text{合}}{=}f(x_2)\overset{\text{可推論出}}{\Rightarrow}x_1=x_2$』

亦即：不會有『兩個（或更多）』箭頭指向『同一個』靶心



非一對一
（一靶中雙箭）