第 14 章

簡單迴歸與相關

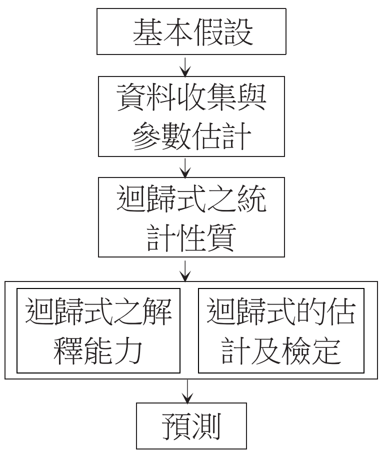

圖 14-0-4　簡單迴歸分析內容

定義 *14-1-1*：簡單迴歸統計分析模式

$$y_i=\beta_0+\beta_1 x_i+\varepsilon_i \qquad i=1,\cdots,n$$

其中(1) y_i 表示自變項 $X=x_i$ 時的因變項值

(2) $\beta_0+\beta_1 x_i$ 表示自變項 $X=x_i$ 時的因變項平均值

(3) ε_i 表示自變項 $X=x_i$ 時因變項 y_i 的個別差異（或隨機誤差）

(4) $\varepsilon_i \sim N(0,\sigma_i^2)$，同時假設 $\sigma_1^2=\cdots=\sigma_n^2=\sigma_{Y|X}^2$ 且所有 ε_i 間相互獨立

(5) β_0 , β_1 分別為 $(x_i, E(Y|X=x_i))$ 所形成的簡單迴歸線的截距與斜率

定義 *14-2-1*：母群體迴歸線（population regression line）

$$E(Y|X=x_i)=\beta_0+\beta_1x_i$$

定義 *14-2-2*：樣本迴歸線（sample regression line）

$$\hat{y}_i=b_0+b_1x_i$$

其中(1) b_0 為 β_0 的估計值

(2) b_1 為 β_1 的估計值

(3) $\hat{y}_i$ 為 $X=x_i$ 時母群體迴歸線上 $E(Y|X=x_i)$ 的估計值，我們稱它為擬合值（fitted value）

定義 *14-2-3*：殘差（residual）

$$\begin{aligned}e_i&=y_i-\hat{y}_i\\&=y_i-(b_0+b_1x_i)\end{aligned}$$

定義 *14-2-4*：殘差平方和（SSE, residual sum of square）

$$\begin{aligned}\text{SSE}&=\sum_{i=1}^{n}e_i^2\\&=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2\\&=\sum_{i=1}^{n}(y_i-b_0-b_1x_i)^2\end{aligned}$$

定義 *14-2-5*：最小平方迴歸線（least-square regression line）

最小平方法下所找到的樣本迴歸線斜率（b_1）及截距（b_0）為

$$b_1=\frac{SS_{xy}}{SS_{xx}}$$

$$b_0=\overline{Y}-b_1\overline{X}$$

其中 SS_{xx} 為 X 的偏差平方和（sum of square deviations），SS_{xy} 為 X, Y 的偏差乘積和（sum of cross products of deviations）。

$$
\begin{aligned}
SS_{xx} &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{X}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{(\Sigma x_i)(\Sigma x_i)}{n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
SS_{xy} &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})(y_i-\overline{Y}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{X}\overline{Y} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{(\Sigma x_i)(\Sigma y_i)}{n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
SS_{yy} &= \sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{Y})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\overline{Y}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{(\Sigma y_i)(\Sigma y_i)}{n}
\end{aligned}
$$

定義 *14-2-6*：簡單迴歸線最小殘差平方和及其自由度

簡單迴歸線最小殘差平方和為最小平方迴歸線所產生的殘差平方和，它的自由度為 $(n-2)$。

定義 *14-2-7*：$\sigma^2_{Y|X}$ 的估計量

$$\hat{\sigma}^2_{Y|X} = S^2_{Y|X} = \frac{\text{SSE}}{n-2} = \text{MSE}$$

定理 *14-3-1*：最小平方迴歸線的統計性質

最小平方迴歸線 $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i$ 具有以下性質

(1)通過資料中心點（$\overline{X},\overline{Y}$）

(2) $\Sigma e_i = 0$ （殘差和等於 0）

(3)$\Sigma e_i x_i = 0$ （殘差與 x_i 之乘積和等於 0）

(4)$\Sigma e_i \hat{y}_i = 0$ （殘差與擬合值乘積和等於 0）

其中(2), (3), (4)為殘差分析中非常重要的依據

定理 *14-3-2*：最小平方迴歸線斜率 b_1 的抽樣分配

$$b_1 \sim N(\beta_1, \frac{\sigma^2_{Y|X}}{SS_{xx}})$$

其中 $E(b_1) = \beta_1$ ， $V(b_1) = \frac{\sigma^2_{Y|X}}{SS_{xx}}$

定理 *14-3-3*：最小平方迴歸線截距 b_0 的抽樣分配

$$b_0 \sim N(\beta_0, (\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{SS_{xx}})\sigma^2_{Y|X})$$

其中$E(b_0) = \beta_0$ ， $V(b_0) = (\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{SS_{xx}})\sigma^2_{Y|X}$

定義 *14-3-1*：總平方和（SST, total sum of square）

在（14-3-3）恆等式左邊所代表的每一筆 y_i 與全體平均值 $(\overline{Y})$ 之差異平方總和，簡稱為總平方和，並以符號SST表示，它的自由度為 $(n-1)$

$$\begin{aligned} SST &= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{Y})^2 \\ &= SS_{yy} \end{aligned}$$

定義 *14-3-2*：迴歸平方和（SSR, regression sum of squares）

在（14-3-3）恆等式右邊第一式所代表的是每一筆迴歸線上擬合值 $(\hat{y}_i)$

與全體平均值 $(\overline{Y})$ 之差異平方的總和，簡稱為迴歸平方和，並以符號 SSR 表示，它的自由度與迴歸式中自變項的個數相同。簡單迴歸只有一個自變項 (X) 所以它的自由度為 1。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{SSR} &= \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \overline{Y})^2 \\
&= b_1^2 SS_{xx} \\
&= b_1 SS_{xy}
\end{aligned}
$$

定義 *14-3-3*：誤差平方和（SSE, error sum of square）

在（14-3-3）恒等式右邊第二式與本章第二節定義 14-2-6 中的最小殘差平方和相同，它的自由度為 $(n-2)$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{SSE} &= \Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2 \\
&= \Sigma y_i^2 - b_0 \Sigma y_i - b_1 \Sigma x_i y_i \\
&= SS_{yy} - b_1^2 SS_{xy} \\
&= SS_{yy} - \frac{SS_{xy}^2}{SS_{xx}} \\
&= SS_{yy} - b_1^2 SS_{xx}
\end{aligned}
$$

定理 *14-3-4*：簡單迴歸的平方和及自由度恒等式

平方和：SST = SSR + SSE

自由度：$(n-1) = 1 + (n-2)$

定義 *14-3-4*：迴歸均方和（regression mean square）及誤差均方和（error mean square）

$$
\text{迴歸均方和} = \frac{\text{迴歸平方和}}{\text{迴歸平方和自由度}} = \frac{\mathrm{SSR}}{1} = \mathrm{MSR}
$$

$$
\text{誤差均方和} = \frac{\text{誤差平方和}}{\text{誤差平方和自由度}} = \frac{\mathrm{SSE}}{n-2} = \mathrm{MSE}
$$

表 14-3-1　簡單迴歸的 ANOVA 表

來源	平方和	自由度	均方和	F 值
迴歸	SSR	1	MSR	$\frac{\text{MSR}}{\text{MSE}}$
誤差	SSE	$n-2$	MSE	
總計	SST	$n-1$		

定義 *14-4-1*：判定係數（coefficient of determination）

所謂判定係數是指象徵因變項 (Y) 變異的總平方和被迴歸平方和所解釋掉的百分比，以符號 r^2 表示。

$$r^2 = 1 - \frac{\text{SSE}}{\text{SST}} = \frac{\text{SSR}}{\text{SST}} = b_1^2 \frac{SS_{xx}}{SS_{yy}} = b_1 \frac{SS_{xy}}{SS_{yy}}$$

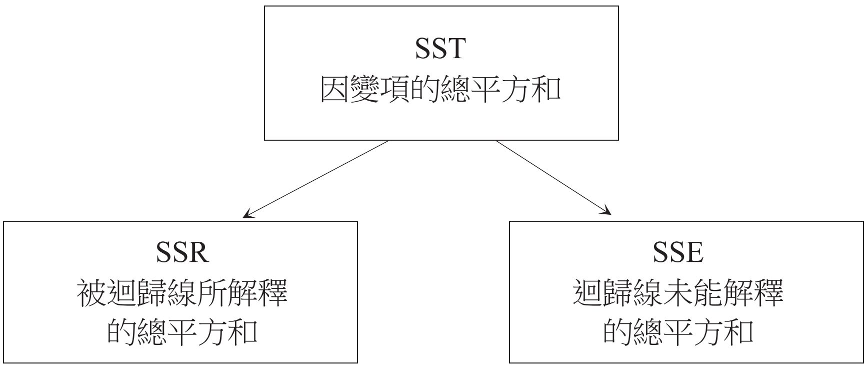

圖 14-4-1　從解釋釋變異看平方和恒等式

定義 *14-4-2*：校正後的判定係數（ *Adj* r^2, adjusted r^2 ）

$$\begin{aligned} Adj\ r^2 &= 1 - \frac{\text{SSE}/(n-2)}{\text{SST}/n-1} \\ &= 1 - \left(\frac{n-1}{n-2}\right)\frac{\text{SSE}}{\text{SST}} \\ &= \frac{\left(\frac{\text{SST}}{n-1}\right) - \left(\frac{\text{SSE}}{n-2}\right)}{\frac{\text{SST}}{(n-1)}} \end{aligned}$$

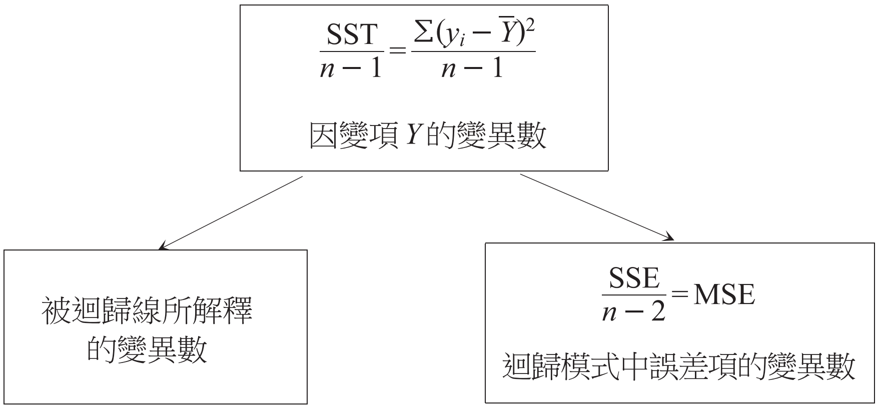

圖 14-4-2　校正判定係數的思考邏輯

$$H_0：\beta_1=0$$
$$H_1：\beta_1\neq 0$$

顯著水準為 α 之拒絕域為

$$R=\left\{\frac{b_1}{\sqrt{\frac{S^2_{Y|X}}{SS_{xx}}}}\ \middle|\ \left|\frac{b_1}{\sqrt{\frac{S^2_{Y|X}}{SS_{xx}}}}\right|>t_{\alpha/2}(n-2)\right\}$$

其中 $S^2_{Y|X}$ 為 $\sigma^2_{Y|X}$ 的估計量（參考第二節定義 14-2-7）

$$H_0：\beta_1=0$$
$$H_1：\beta_1\neq 0$$

顯著水準為 α 之拒絕域為

$$R=\left\{\frac{\text{MSR}}{\text{MSE}}\ \middle|\ \frac{\text{MSR}}{\text{MSE}}>F_\alpha(1, n-2)\right\}$$

其中 $\frac{\text{MSR}}{\text{MSE}}$ 為簡單迴歸 ANOVA 表中的 F 值

β_1的$100(1-\alpha)\%$信賴區間為

$$\left[b_1 - t_{\alpha/2}(n-2)\sqrt{\frac{S^2_{Y|X}}{SS_{xx}}},\ b_1 + t_{\alpha/2}(n-2)\sqrt{\frac{S^2_{Y|X}}{SS_{xx}}}\right]$$

當$X=x_0$時，平均反應$E(Y|X=x_0)$的$100(1-\alpha)\%$信賴區間下、上限 L, U 分別為：

$$L=(b_0+b_1x_0)-t_{\alpha/2}(n-2)S_{Y|X}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\overline{X})^2}{SS_{xx}}}$$

$$U=(b_0+b_1x_0)+t_{\alpha/2}(n-2)S_{Y|X}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\overline{X})^2}{SS_{xx}}}$$

其中$S_{Y|X}$為$\sigma_{Y|X}$的估計量

當$X=x_0$時，個別反應(y_0)的$100(1-\alpha)\%$信賴區間下、上限為

$$L=(b_0+b_1x_0)-t_{\alpha/2}(n-2)S_{Y|X}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\overline{X})^2}{SS_{xx}}}$$

$$U=(b_0+b_1x_0)+t_{\alpha/2}(n-2)S_{Y|X}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\overline{X})^2}{SS_{xx}}}$$

定義 *14-7-1*：樣本相關係數（sample correlation coefficient）

$(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$為抽樣自兩個母群體的配對隨機樣本，則這兩個母群體（或隨機變數）的樣本相關係數r為

$$r=\frac{S_{xy}}{S_xS_y}$$

其中

$$S_{xy}=\frac{\Sigma(x_i-\overline{X})(y_i-\overline{Y})}{n-1}$$

$$S_x^2=\frac{\Sigma(x_i-\overline{X})^2}{n-1}$$

$$S_y^2=\frac{\Sigma(y_i-\overline{Y})^2}{n-1}$$

擬定H_0、H_1	$H_0:\rho=0$ $H_1:\rho\neq 0$ （雙尾檢定）	$H_0:\rho\leq 0$ $H_1:\rho>0$ （右尾檢定）	$H_0:\rho\geq 0$ $H_1:\rho<0$ （左尾檢定）
抽樣	(x_1,y_1) (x_2,y_2) $\vdots$ (x_n,y_n)		
檢定統計量	$r=\dfrac{S_{xy}}{S_x\ S_y}$，其中 $S_{xy}=\dfrac{\Sigma\,(x_i-\overline{X})(y_i-\overline{Y})}{n-1}$ S_x,S_y 為 X, Y 的樣本標準差		
H_0為真時，檢定統計量的抽樣分配	$r\doteq N(0,\dfrac{1-\rho^2}{n-2})$		
標準化	$\dfrac{r-0}{\sqrt{\dfrac{1-r^2}{n-2}}}\doteq t(n-2)$		
顯著水準α的拒絕域	$\left\lvert\dfrac{r-0}{\sqrt{\dfrac{1-r^2}{n-2}}}\right\rvert>t_{\alpha/2}(n-2)$	$\dfrac{r-0}{\sqrt{\dfrac{1-r^2}{n-2}}}>t_\alpha(n-2)$	$\dfrac{r-0}{\sqrt{\dfrac{1-r^2}{n-2}}}<-t_\alpha(n-2)$

圖 14-7-1　相關係數ρ的檢定程序

14.1 (X, Y) 抽樣資料如下表，

X	10	8	11	7	9
Y	41	35	45	32	37

⑴計算迴歸線係數 b_0, b_1。

⑵計算最小平方迴歸式的殘差平方和。

⑶編製 ANOVA 表。

⑷估計迴歸模式中誤差項 ε_i 的變異數 $\sigma^2_{Y|X}$。

⑸估計迴歸係數 b_0 的變異數。

⑹估計迴歸係數 b_1 的變異數。

⑺計算迴歸線的判定係數及校正後的判定係數。

解：

表 E-14-1-1

x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2	y_i^2
10	41	410	100	1681
8	35	280	64	1225
11	45	495	121	2025
7	32	224	49	1024
9	37	333	81	1369
45	190	1742	415	7324
9	38	348.4	83	1464.8

⑴$SS_{xx} = \Sigma x_i^2 - n\overline{X}^2 = 415 - 5\,(9)^2 = 10$

$SS_{xy} = \Sigma x_iy_i - n\overline{X}\,\overline{Y} = 1742 - 5\,(9)\,(38) = 32$

$SS_{yy} = \Sigma y_i^2 - n\overline{Y}^2 = 7324 - 5\,(38)^2 = 104$

$$b_1 = \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}} = \frac{32}{10} = 3.2$$

$b_0 = \overline{Y} - b_1\overline{X} = 38 - (3.2)\,(9) = 9.2$

(2)

表 E-14-1-2

x_i	y_i	$\hat{y}_i = 9.2 + 3.2x_i$	$y_i - \hat{y}_i$	$(y_i - \hat{y}_i)^2$
10	41	41.2	-0.2	0.04
8	35	34.8	0.2	0.04
11	45	44.4	0.6	0.36
7	32	31.6	0.4	0.16
9	37	38	-1	1
				1.6

從表 E-14-1-2，得知最小平方迴歸式的殘差平方和 $SSE = 1.6$ 。其他的計算方式有

$$\begin{aligned} SSE &= \Sigma y_i^2 - b_0 \Sigma y_i - b_1 \Sigma x_i y_i \\ &= 7324 - (9.2)(190) - (3.2)(1742) \\ &= 1.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SSE &= SS_{yy} - b_1 SS_{xy} \\ &= 104 - (3.2)(32) \\ &= 1.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SSE &= SS_{yy} - \frac{SS_{xy}^2}{SS_{xx}} \\ &= 104 - \frac{(32)^2}{10} \\ &= 1.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SSE &= SS_{yy} - b_1^2 SS_{xx} \\ &= 104 - (3.2)^2 (10) \\ &= 1.6 \end{aligned}$$

(3) $SST = \Sigma y_i^2 - n\overline{Y} = SS_{yy} = 104$

$SSR = SST - SSE = 104 - 1.6 = 102.4$

所以，本題的 ANOVA 表如表 E-14-1-3 所示

表 E-14-1-3

來源	平方和	自由度	均方和	F 值
迴歸	102.4	1	102.4	192
誤差	1.6	3	0.533	
總計	104	4		

(4) $\hat{\sigma}^2_{Y|X}=S^2_{Y|X}=\dfrac{\text{SSE}}{n-2}=\dfrac{1.6}{3}=0.533$

(5) b_0的變異數為$\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{\overline{X}^2}{SS_{xx}}\right)\sigma^2_{Y|X}$，我們以 $S^2_{Y|X}$ 估計 $\sigma^2_{Y|X}$ 便得知 b_0 的變異數估計值 $S^2_{b_0}$ 為

$$S^2_{b_0}=\left(\frac{1}{5}+\frac{9^2}{10}\right)0.533=4.427$$

(6) b_1的變異數為$\left(\dfrac{1}{SS_{xx}}\right)\sigma^2_{Y|X}$，所以 b_1 的變異數估計值 $S^2_{b_1}$ 為

$$S^2_{b_1}=\left(\frac{1}{10}\right)0.533=0.0533$$

(7) $r^2=\dfrac{\text{SSR}}{\text{SST}}=1-\dfrac{\text{SSE}}{\text{SST}}=1-\dfrac{1.6}{104}=0.9846$

$$Adj\ r^2=1-\left(\frac{n-1}{n-2}\right)\frac{\text{SSE}}{\text{SST}}=1-\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1.6}{104}\right)=0.9795$$

14.2 (X, Y) 的抽樣資料如下

X	5	3	6	2	4
Y	21	15	23	12	18

(1)計算最小平方迴歸線係數b_0, b_1。

(2)計算最小平方迴歸線的殘差平方和。

(3)編製 ANOVA 表。

(4)估計迴歸模式中誤差項 ε_i 的變異數 $\sigma^2_{Y|X}$。

(5)估計迴歸係數 b_0 的變異數及標準差。

(6)估計迴歸係數 b_1 的變異數及標準差。

(7)計算迴歸線的判定係數及校正後的判定係數。

解：

表 E-14-2-1

x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2	y_i^2
5	21	105	25	441
3	15	45	9	225
6	23	138	36	529
2	12	24	4	144
4	18	72	16	324
20	89	384	90	1663
4	17.8			

(1)$SS_{xx}=\Sigma x_i^2-n\overline{X}^2=90-5(4)^2=10$

$SS_{xy}=\Sigma x_iy_i-n\overline{X}\overline{Y}=384-5(4)(17.8)=28$

$SS_{yy}=\Sigma y_i^2-n\overline{Y}^2=1663-5(17.8)^2=78.8$

$$b_1=\frac{SS_{xy}}{SS_{xx}}=\frac{28}{10}=2.8$$

$b_0=\overline{Y}-b_1\overline{X}=17.8-(2.8)(4)=6.6$

(2)

表 E-14-2-2

x_i	y_i	$\hat{y}_i=6.6+2.8x_i$	$y_i-\hat{y}_i$	$(y_i-\hat{y}_i)^2$
5	21	20.6	0.4	0.16
3	15	15.0	0.0	0
6	23	23.4	−0.4	0.16
2	12	12.2	−0.2	0.04
4	18	17.8	0.2	0.04
				0.4

從表E-14-2-2，得知最小平方迴歸線的殘差平方和$SSE=0.4$。其他的計算方式有

$$\begin{aligned}\text{SSE}&=\Sigma y_i^2-b_0\Sigma y_i-b_1\Sigma x_iy_i\\&=1663-(6.6)(89)-(2.8)(384)\\&=0.4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{SSE}&=SS_{yy}-b_1SS_{xy}\\&=78.8-(2.8)(28)\\&=0.4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{SSE}&=SS_{yy}-\frac{SS_{xy}^2}{SS_{xx}}\\&=78.8-\frac{28^2}{10}\\&=0.4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{SSE}&=SS_{yy}-b_1^2SS_{xx}\\&=78.8-(2.8)^2(10)\\&=0.4\end{aligned}$$

(3)$\text{SST}=\Sigma y_i^2-n\overline{Y}^2=SS_{yy}=78.8$

$\text{SSR}=\text{SST}-\text{SSE}=78.8-0.4=78.4$

所以，本題的 ANOVA 表如表 E-14-2-3 所示。

表 E-14-2-3

來源	平方和	自由度	均方和	F 值
迴歸	78.4	1	78.4	588
誤差	0.4	3	0.1333	
總計	78.8	4		

(4)$\hat{\sigma}^2_{Y|X}=S^2_{Y|X}=\dfrac{\text{SSE}}{n-2}=\dfrac{0.4}{3}=0.1333$

(5)b_0的變異數為$(\dfrac{1}{n}+\dfrac{\overline{X}^2}{SS_{xx}})\,\sigma^2_{Y|X}$，以 $S^2_{Y|X}$估計 $\sigma^2_{Y|X}$便得到 b_0 的變異數及標準差估計值為

$$S^2_{b_0}=\left(\frac{1}{5}+\frac{4^2}{10}\right)0.1333=0.24$$
$$S_{b_0}=\sqrt{0.24}=0.4899$$

(6)b_1的變異數為$\left(\dfrac{1}{SS_{xx}}\right)\sigma^2_{Y|X}$，所以 b_1 的變異數及標準差估計值為

$$S^2_{b_1}=\left(\frac{1}{10}\right)0.1333=0.01333$$
$$S_{b_1}=\sqrt{0.01333}=0.11547$$

(7)$r^2=\dfrac{\text{SSR}}{\text{SST}}=1-\dfrac{\text{SSE}}{\text{SST}}=1-\dfrac{0.4}{78.8}=0.9949$

$Adj\ r^2=1-\left(\dfrac{n-1}{n-2}\right)\dfrac{\text{SSE}}{\text{SST}}=1-\left(\dfrac{4}{3}\right)\left(\dfrac{0.4}{78.8}\right)=0.9932$

14.3 迴歸分析的樣本資訊為$n=10$，$b_1=6$，$b_0=12$，$S_{b_1}=3$，$S_{b_0}=1.5$

(1)計算β_1的 95%信賴區間。

(2)計算β_0的 95%信賴區間。

解：

$$t_{0.025}(8)=2.306$$

(1)β_1的 95%信賴區間為

$$[b_1-(2.306)\,S_{b_1}\,,\,b_1+(2.306)\,S_{b_1}]$$

根據本題樣本資訊所計算的信賴區間為

$$[6-(2.306)\,(3)\,,\,6+(2.306)\,(3)]$$
$$=[-0.918\,,\,12.918]$$

(2)β_0的 95%信賴區間為

$$[b_0-(2.306)S_{b_0}, b_0+(2.306)S_{b_0}]$$

根據本題樣本資訊計算出的信賴區間為

$$[12-(2.306)(1.5), 12+(2.306)(1.5)]$$
$$=[8.541, 15.459]$$

14.4 迴歸分析中的樣本資訊為$n=21$，$b_1=25$，$b_0=62$，$S_{b_1}=4$，$S_{b_0}=40$

(1)在顯著水準$\alpha=0.05$下檢定H_0：$\beta_1=0$，H_1：$\beta_1\neq 0$。

(2)在顯著水準$\alpha=0.05$下檢定H_0：$\beta_1=20$，H_1：$\beta_1\neq 20$。

(3)在顯著水準$\alpha=0.05$下檢定H_0：$\beta_0=60$，H_1：$\beta_0\neq 60$。

解：

(1) H_0：$\beta_1=0$

H_1：$\beta_1\neq 0$

$\alpha=0.05$，$\frac{\alpha}{2}=0.025$，$t_{0.025}(19)=2.093$。所以這個檢定的拒絕域為

$$R=\left\{\frac{b_1}{S_{b_1}}\,\middle|\,\left|\frac{b_1}{S_{b_1}}\right|>2.093\right\}$$

根據本題樣本資訊計算檢定值

$$\frac{b_1}{S_{b_1}}=\frac{25}{4}=6.25>2.093$$

所以，檢定結果為拒絕H_0，這表示迴歸線的斜率顯著不等於 0。

(2)H_0：$\beta_1=20$

H_1：$\beta_1\neq 20$

$\alpha=0.05$時，這個檢定的拒絕域 R 為

$$R=\left\{\frac{b_1-20}{S_{b_1}}\,\middle|\,\left|\frac{b_1-20}{S_{b_1}}\right|>2.093\right\}$$

根據本題樣本資訊計算檢定值

$$\frac{b_1-20}{S_{b_1}}=\frac{25-20}{4}=\frac{5}{4}=1.25<2.093$$

所以，檢定結果為不拒絕 H_0 ，這表示迴歸線斜率有可能為 20。

(3) H_0 ：$\beta_0=60$

H_1 ：$\beta_0\neq60$

$\alpha=0.05$時，這個檢定的拒絕域為

$$R=\left\{\frac{b_0-60}{S_{b_0}}\;\middle|\;\left|\frac{b_0-60}{S_{b_0}}\right|>2.093\right\}$$

根據本題樣本資訊計算檢定值

$$\frac{b_0-60}{S_{b_0}}=\frac{62-60}{40}=\frac{2}{40}=0.05<2.093$$

所以檢定結果為不拒絕 H_0 ，這表示迴歸線的截距有可能為 60。

14.5 迴歸分析的樣本資訊為$\hat{y}_i=-12+26x_i$，$n=12$，$\overline{X}=30$，$SS_{xx}=36$，$SSE=100$

(1)計算 $x=20$ 時，平均反應 $E(Y|x=20)$ 的 95%信賴度之預測區間。

(2)計算 $x=20$ 時，反應值 Y 的 95%信賴度之預測區間。

解：

$S^2_{Y|X}=\frac{100}{n-2}=\frac{100}{10}=10$，所以$S_{Y|X}=3.162$

$1-\alpha=0.95$，$\frac{\alpha}{2}=0.025$，所以$t_{0.025}(10)=2.228$

(1) $x=20$時，$E(Y|x=20)$的 95%預測區間的上、下限為

$$(b_0+20b_1)-(2.228)\,S_{Y|X}\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{(20-\overline{X})^2}{SS_{xx}}}$$
$$(b_0+20b_1)+(2.228)\,S_{Y|X}\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{(20-\overline{X})^2}{SS_{xx}}}$$

根據本題樣本資訊計算這個區間的上、下限為

$$(-12+(26)(20))-(2.228)(3.162)\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{(20-30)^2}{36}}=496.0836$$

$$(-12+(26)(20))+(2.228)(3.162)\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{(20-30)^2}{36}}=519.9146$$

⑵ $x=20$時，Y的 95%預測區間的上、下限為

$$(b_0+20b_1)-(2.228)S_{Y|X}\sqrt{1+\frac{1}{12}+\frac{(20-\overline{X})^2}{SS_{xx}}}$$
$$(b_0+20b_1)+(2.228)S_{Y|X}\sqrt{1+\frac{1}{12}+\frac{(20-\overline{X})^2}{SS_{xx}}}$$

根據本題樣本資訊計算出這個區間的上、下限為

$$(-12+(26)(20))-(2.228)(3.162)\sqrt{1+\frac{1}{12}+\frac{(20-30)^2}{36}}=494.1569$$
$$(-12+(26)(20))+(2.228)(3.162)\sqrt{1+\frac{1}{12}+\frac{(20-30)^2}{36}}=521.8431$$

14.6 迴歸分析的樣本資訊為$\hat{y}_i=20+45x_i$，$n=30$，$\overline{X}=20$，$SS_{xx}=64$，$S^2_{Y|X}=36$

⑴計算 $x=10$ 時，平均反應 $E(Y|x=10)$ 的 95%信賴度之預測區間。

⑵計算 $x=10$ 時，反應值 Y 的 95%信賴度之預測區間。

⑶計算 $x=20$ 時，平均反應 $E(Y|x=20)$ 的 95%信賴度之預測區間。

⑷計算 $x=20$ 時，反應值 Y 的 95%信賴度之預測區間。

解：

$1-\alpha=0.95$，$\frac{\alpha}{2}=0.025$，所以$t_{0.025}(28)=2.048$

⑴ $x=10$時，$E(Y|x=10)$的 95%信賴度之預測區間上、下限為

$$(b_0+b_1(10))-(2.048)S_{Y|X}\sqrt{\frac{1}{30}+\frac{(10-20)^2}{SS_{xx}}}$$
$$(b_0+b_1(10))+(2.048)S_{Y|X}\sqrt{\frac{1}{30}+\frac{(10-20)^2}{SS_{xx}}}$$

根據本題樣本資訊計算這個區間的上、下限為

$$(20+45(10))-(2.048)(6)\sqrt{\frac{1}{30}+\frac{(10-20)^2}{64}}=454.477$$
$$(20+45(10))+(2.048)(6)\sqrt{\frac{1}{30}+\frac{(10-20)^2}{64}}=485.523$$

⑵$x=10$時，Y的 95%預測區間的上、下限為

$$(b_0+b_1(10))-(2.048)S_{Y|X}\sqrt{1+\frac{1}{30}+\frac{(10-20)^2}{SS_{xx}}}$$
$$(b_0+b_1(10))+(2.048)S_{Y|X}\sqrt{1+\frac{1}{30}+\frac{(10-20)^2}{SS_{xx}}}$$

根據本題樣本資訊計算這個區間的上、下限為

$$(20+45(10))-(2.048)(6)\sqrt{1+\frac{1}{30}+\frac{(10-20)^2}{SS_{xx}}}=450.2021$$
$$(20+45(10))+(2.048)(6)\sqrt{1+\frac{1}{30}+\frac{(10-20)^2}{SS_{xx}}}=489.7979$$

⑶$x=20$時，$E(Y|x=20)$的 95%預測區間為

$$(b_0+b_1(20))-(2.048)S_{Y|X}\sqrt{\frac{1}{30}}$$
$$(b_0+b_1(20))+(2.048)S_{Y|X}\sqrt{\frac{1}{30}}$$

根據本題樣本資訊計算這個區間的上、下限為

$$(20+45(20))-(2.048)(6)\sqrt{\frac{1}{30}}=917.7565$$
$$(20+45(20))+(2.048)(6)\sqrt{\frac{1}{30}}=922.2435$$

⑷$x=20$時，Y的 95%預測區間的上、下限值為

$$(b_0+b_1(20))-(2.048)S_{Y|X}\sqrt{1+\frac{1}{30}}$$
$$(b_0+b_1(20))+(2.048)S_{Y|X}\sqrt{1+\frac{1}{30}}$$

根據本題樣本資訊計算這個區間的上、下限值為

$$(20+45(20))-(2.048)(6)\sqrt{1+\frac{1}{30}}=907.5089$$
$$(20+45(20))+(2.048)(6)\sqrt{1+\frac{1}{30}}=932.4911$$

14.7 影印機出租廠商記錄 12 家辦公室影印機台數（X）及該公司每年派技術員進行維修的時數（Y），資料如表 E-14-7-1

表 E-14-7-1

X：影印機台數	Y：維修服務時數
4	197
6	272
2	100
5	228
7	327
6	279
3	148
8	377
5	238
3	142
1	66
5	239

(1)計算最小平方迴歸線 $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i$。
(2)計算最小平方迴歸線的殘差平方和。
(3)驗證 $\Sigma e_i = 0$。
(4)驗證 $\Sigma x_i e_i = 0$。
(5)驗證 $\Sigma \hat{y}_i e_i = 0$。

解：

表 E-14-7-2

x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2	y_i^2
4	197	788	16	38809
6	272	1632	36	73984
2	100	200	4	10000
5	228	1140	25	51984
7	327	2289	49	106929
6	279	1674	36	77841
3	148	444	9	21904
8	377	3016	64	142129
5	238	1190	25	56644
3	142	426	9	20164
1	66	66	1	4356
5	239	1195	25	57121
55	2613	14060	299	661865

⑴$SS_{xx}=\Sigma x_i^2-n\overline{X}^2=46.91667$

$SS_{yy}=\Sigma y_i^2-n\overline{Y}^2=92884.25$

$SS_{xy}=\Sigma x_iy_i-n\overline{X}\,\overline{Y}=2083.75$

$$b_1=\frac{SS_{xy}}{SS_{xx}}=\frac{2083.75}{46.91667}=44.41385$$

$b_0=\overline{Y}-b_1\overline{X}=14.1865$

所以，最小平方迴歸線為$\hat{y}_i=14.1865+44.41385x_i$

⑵最小平方迴歸線的殘差平方和如試算表 E-14-7-3，所以SSE＝336.8810

表 E-14-7-3

x_i	y_i	$\hat{y}_i$	$y_i-\hat{y}_i$	$(y_i-\hat{y}_i)^2$
4	197	191.8419	5.1581	26.6058
6	272	280.6696	−8.6696	75.1624
2	100	103.0142	−3.0142	9.0855
5	228	236.2558	−8.2558	68.1578
7	327	325.0835	1.9165	3.6730
6	279	280.6696	−1.6696	2.7877
3	148	147.4281	0.5719	0.3271
8	377	369.4973	7.5027	56.2900
5	238	236.2558	1.7442	3.0423
3	142	147.4281	−5.4281	29.4639
1	66	58.6004	7.3996	54.7547
5	239	236.2558	2.7442	7.5308
			0	336.8810

(3)由表 E-14-7-4 第四欄驗證了$\Sigma e_i=\Sigma(y_i-\hat{y}_i)=0$

(4)由表 E-14-7-4 第五欄驗證了$\Sigma x_i e_i=0$

(5)由表 E-14-7-4 第六欄驗證了$\Sigma \hat{y}_i e_i=0$

表 E-14-7-4

x_i	y_i	$\hat{y}_i$	$y_i-\hat{y}_i$	$X_i(y_i-\hat{y}_i)$	$\hat{y}_i(y_i-\hat{y}_i)$
4	197	191.8419	5.1581	20.6323	989.5363
6	272	280.6696	−8.6696	−52.0178	−2433.3010
2	100	103.0142	−3.0142	−6.0284	−310.5064
5	228	236.2558	−8.2558	−41.2789	−1950.4739
7	327	325.0835	1.9165	13.4156	623.0286
6	279	280.6696	−1.6696	−10.0178	−468.6136
3	148	147.4281	0.5719	1.7158	84.3194

8	377	369.4973	7.5027	60.0213	2772.2145
5	238	236.2558	1.7442	8.7211	412.0838
3	142	147.4281	−5.4281	−16.2842	−800.2490
1	66	58.6004	7.3396	7.3996	433.6218
5	239	236.2558	2.7442	13.7211	648.3396
			0	0.0000	0.0000

14.8 某公司想找出員工人數（X）與管銷費用（Y）間的線性關係，隨機抽取 10 家分公司的（X, Y）資料如表 E-14-8-1

表 E-14-8-1

X：員工人數	Y：管銷費用（單位：萬）
20	30
40	60
20	40
30	60
10	30
10	40
20	40
20	50
20	30
30	70

(1)計算最小平方迴歸線 $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i$。

(2)計算最小平方迴歸線的殘差平方和。

(3)估計迴歸模式中誤差項 ε_i 的變異數。

(4)編製 ANOVA 表。

(5)計算迴歸線的判定係數及校正後的判定係數。

(6)估計 b_0 的變異數。

(7)估計 b_1 的變異數。

(8)顯著水準 $\alpha=0.05$ 下檢定 H_0：$\beta_1=0$，H_1：$\beta_1>0$。

(9)顯著水準 $\alpha=0.05$ 下檢定 H_0：$\beta_0=0$，H_1：$\beta_0>0$。

(10)計算 β_1 的 95%信賴區間。

(11)計算當 $x=35$ 時，管銷費用平均值的 95%信賴度預測區間。

解：

表 E-14-8-2

x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2	y_i^2
20	30	600	400	900
40	60	2400	1600	3600
20	40	800	400	1600
30	60	1800	900	3600
10	30	300	100	900
10	40	400	100	1600
20	40	800	400	1600
20	50	1000	400	2500
20	30	600	400	900
30	70	2100	900	4900
220 $\overline{X}=22$	450 $\overline{Y}=45$	10800	5600	22100

(1)由試算表 E-14-8-2 得知

$$SS_{xx}=\Sigma x_i^2-n\overline{X}^2=5600-10(22^2)=760$$
$$SS_{yy}=\Sigma y_i^2-n\overline{Y}^2=22100-10(45^2)=1850$$
$$SS_{xy}=\Sigma x_iy_i-n\overline{X}\,\overline{Y}=10800-10(22)(45)=900$$

$$b_1=\frac{SS_{xy}}{SS_{xx}}=\frac{900}{760}=1.1842$$
$$b_0=\overline{Y}-b_1\overline{X}=45-(1.1842)(22)=18.9476$$

所以，最小平方迴歸式為$\hat{y}_i = 18.9476 + 1.1842x_i$

⑵最小平方迴歸線的殘差平方和如試算表 E-14-8-3。所以，SSE＝784.2105

表 E-14-8-3

x_i	y_i	$\hat{y}_i = 18.9476 + 1.1842X_i$	$y_i - \hat{y}_i$	$(y_i - \hat{y}_i)^2$
20	30	42.6307	−12.6307	159.5346
40	60	66.3147	−6.3147	39.8754
20	40	42.6307	−2.6307	6.9205
30	60	54.4727	5.5273	30.5510
10	30	30.7887	−0.7887	0.6221
10	40	30.7887	9.2113	84.8481
20	40	42.6307	−2.6307	6.9206
20	50	42.6307	7.3693	54.3066
20	30	42.6307	−12.6307	159.5346
30	70	54.4727	15.5273	241.097
			0	784.2105

另外的計算方法有：

$$\begin{aligned}\text{SSE} &= \Sigma y_i^2 - b_0 \Sigma y_i - b_1 \Sigma x_i y_i \\ &= 22100 - (18.9476)(450) - (1.1842)(10800) \\ &= 784.2105\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{SSE} &= SS_{yy} - b_1 SS_{xy} \\ &= 1850 - (1.1842)(900) \\ &= 784.2105\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{SSE} &= SS_{yy} - \frac{SS_{xy}^2}{SS_{xx}} \\ &= 1850 - \frac{(900)^2}{760}\end{aligned}$$

$=784.2105$

$\text{SSE}=SS_{yy}-b_1^2 SS_{xx}$

$=1850-(1.1842)^2(760)$

$=784.2105$

(3)$\hat{\sigma}^2_{Y|X}=S^2_{Y|X}=\text{MSE}=\dfrac{\text{SSE}}{8}=\dfrac{784.2105}{8}=98.026$

所以，誤差項的近似分配為

$\varepsilon_i \sim N(0, 98.026)$

(4)$\text{SST}=\Sigma y_i^2-n\overline{Y}^2=SS_{yy}=1850$

$\text{SSR}=\text{SST}-\text{SSE}=1850-784.2105=1065.79$

所以本題的 ANOVA 表如表 E-14-8-4。

表 E-14-8-4

來源	平方和	自由度	均方和	F 值
迴歸	1065.8	1	1065.8	10.87
誤差	784.2	8	98	
總計	1850	9		

(5)$r^2=\dfrac{\text{SSR}}{\text{SST}}=1-\dfrac{\text{SSE}}{\text{SST}}=1-\dfrac{784.2}{1850}=0.576$

$Adj\ r^2=1-\left(\dfrac{n-1}{n-2}\right)\dfrac{\text{SSE}}{\text{SST}}=1-\left(\dfrac{9}{8}\right)\dfrac{784.2}{1850}=0.523$

(6)$S^2_{b_0}=\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{\overline{X}^2}{SS_{xx}}\right)\text{MSE}$

$=\left(\dfrac{1}{10}+\dfrac{22^2}{760}\right)(98.026)=72.23$

所以 b_0 的近似分配為 $b_0 \sim N(\beta_0, 72.23)$

(7)$S_{b_1}^2=\left(\dfrac{1}{SS_{xx}}\right)\text{MSE}=\left(\dfrac{1}{760}\right)98.026=0.129$

所以 b_1 的近似分配為 $b_1 \sim N(\beta_1, 0.129)$

(8)H_0：$\beta_1=0$

H_1：$\beta_1>0$

顯著水準 $\alpha=0.05$ 時 $t_{0.05}(8)=1.86$，所以檢定的拒絕域為

$$R=\left\{\frac{b_1}{S_{b_1}}\,\middle|\,\frac{b_1}{S_{b_1}}>1.86\right\}$$

根據本題樣本資料計算檢定值

$$\frac{b_1}{S_{b_1}}=\frac{1.1842}{\sqrt{0.129}}=3.2968>1.86$$

所以，檢定結果為拒絕 H_0，這表示迴歸線斜率顯著大於 0。

(9)H_0：$\beta_0=0$

H_1：$\beta_0>0$

顯著水準 $\alpha=0.05$ 時的拒絕域為

$$R=\left\{\frac{b_0}{S_{b_0}}\,\middle|\,\frac{b_0}{S_{b_0}}>1.86\right\}$$

根據本題樣本資料計算檢定值

$$\frac{b_0}{S_{b_0}}=\frac{18.9476}{\sqrt{72.23}}=2.2294>1.86$$

所以，檢定結果為拒絕 H_0，這表示迴歸線截距顯著大於 0。

(10)$t_{0.025}(8)=2.306$，所以 β_1 的 95%信賴區間為

$$[b_1-(2.306)S_{b_1}, b_1+(2.306)S_{b_1}]$$

根據本題樣本資料所計算的區間為

$$[1.1842-(2.306)(\sqrt{0.129}),\ 1.1842+2.306(\sqrt{0.129})]$$
$$=[0.356,\ 2.012]$$

⑾ $x=35$ 時，管銷費用平均值的 95%預測區間的上、下限為

$$(b_0+35b_1)-(2.306)\,S_{Y|X}\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{(35-\overline{X})^2}{SS_{xx}}}$$
$$(b_0+35b_1)+(2.306)\,S_{Y|X}\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{(35-\overline{X})^2}{SS_{xx}}}$$

根據本題樣本資料，計算這個區間的上、下限為

$$(18.9476)+(35)(1.1842)-(2.306)(\sqrt{98.026})\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{(35-22)^2}{760}}=48.9494$$
$$(18.9476)+(35)(1.1842)+(2.306)(\sqrt{98.026})\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{(35-22)^2}{760}}=71.8398$$

14.9 某咖啡速食連鎖店在市區辦公大樓普設據點，表 E-14-9-1 為隨機抽樣市區內 10 個據點所記錄的 X（辦公大樓內上班族人數），Y（平均每日營業金額）。

表 E-14-9-1

X：人數（單位：百）	Y：營業類（單位：仟元）
2	58
6	105
8	88
8	118
12	117
16	137
20	157
20	169
22	149
26	202

(1)計算最小平方迴歸線 $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i$。

(2)計算最小平方迴歸線的殘差平方和。

(3)編製 ANOVA 表。

(4)估計迴歸模式中誤差項 ε_i 的變異數 $\sigma^2_{Y|X}$。

(5)計算迴歸線的判定係數及校正後判定係數。

(6)估計 b_0 的變異數。

(7)估計 b_1 的變異數。

(8)顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下檢定 H_0：$\beta_1 = 0$，H_1：$\beta_1 > 0$。

(9)顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下檢定 H_1：$\beta_0 = 0$，H_1：$\beta_0 \neq 0$。

(10)計算 β_0 的 95%信賴區間為。

(11)計算 β_1 的 95%信賴區間為。

(12)計算當 $x = 15$ 時，預測營業額平均值的 95%信賴區間。

(13)計算當 $x = 15$ 時，預測營業額的 95%信賴區間。

解：

表 14-E-9-2

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
2	58	116	4	3364
6	105	630	36	11025
8	88	704	64	7744
8	118	944	64	13924
12	117	1404	144	13689
16	137	2192	256	18769
20	157	3140	400	24649
20	169	3380	400	28561
22	149	3278	484	22201
26	202	5252	676	40804
$\Sigma = 140$ $\overline{X} = 14$	$\Sigma = 1300$ $\overline{Y} = 130$	$\Sigma = 21040$	$\Sigma = 2528$	$\Sigma = 184730$

⑴$SS_{xx} = \Sigma x_i^2 - n\overline{X}^2$

$= 2528 - 10(14)^2$

$= 568$

$SS_{xy} = \Sigma x_i y_i - n\overline{X}\,\overline{Y}$

$= 21040 - 10(14)(130)$

$= 2840$

$SS_{yy} = \Sigma y_i^2 - n\overline{Y}^2$

$= 184730 - 10(130)^2$

$= 15730$

$$b_1 = \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}} = \frac{2840}{568} = 5$$

$$b_0 = \overline{Y} - b_1\overline{X} = 130 - 5(14) = 60$$

所以，最小平方迴歸式為

$$\hat{y}_i = 60 + 5x_i$$

⑵最小平方迴歸線的殘差平方和如試算表 E-14-9-3 所示。所以 SSE＝1530。

表 E-14-9-3

x_i	y_i	$\hat{y}_i = 60 + 5x_i$	$y_i - \hat{y}_i$	$(y_i - \hat{y}_i)^2$
2	58	70	−12	144
6	105	90	15	225
8	88	100	−12	144
8	118	100	18	324
12	117	120	−3	9
16	137	140	−3	9
20	157	160	−3	9

20 22 26	169 149 202	160 170 190	9 −21 12	81 441 144
				$\Sigma=1530$

另外的計算方法有：

$$\begin{aligned}\text{SSE} &= \Sigma y_i^2 - b_0\Sigma y_i - b_1\Sigma x_iy_i \\ &= 184730 - 60(1300) - 5(21040) \\ &= 1530\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{SSE} &= SS_{yy} - b_1 SS_{xy} \\ &= 15730 - 5(2840) \\ &= 1530\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{SSE} &= SS_{yy} - \frac{SS_{xy}^2}{SS_{xx}} \\ &= 15730 - \frac{(2840)^2}{568} \\ &= 1530\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{SSE} &= SS_{yy} - b_1^2 SS_{xx} \\ &= 15730 - 5^2(568) \\ &= 1530\end{aligned}$$

(3) $\text{SST} = \Sigma y_i^2 - n\overline{Y}^2 = SS_{yy} = 15730$

$\text{SSR} = \text{SST} - \text{SSE} = 15730 - 1530 = 14200$

所以，本題的 ANOVA 表如表 E-14-9-4

表 E-14-9-4

來源	平方和	自由度	均方和	F 值
迴歸	14200	1	14200	74.25
誤差	1530	8	191	
總計	15730	9		

(4) $\hat{\sigma}^2_{Y|X}=S^2_{Y|X}=\text{MSE}=\dfrac{\text{SSE}}{8}=191$

(5) $r^2=\dfrac{\text{SSR}}{\text{SST}}=1-\dfrac{\text{SSE}}{\text{SST}}=1-\dfrac{1530}{15730}=0.9027$

$Adj\ r^2=1-\left(\dfrac{n-1}{n-2}\right)\dfrac{\text{SSE}}{\text{SST}}=1-\left(\dfrac{9}{8}\right)\dfrac{1530}{15730}=0.8905$

(6) b_0 的變異數為$\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{\overline{X}^2}{SS_{xx}}\right)\sigma^2_{Y|X}$，其中 $\sigma^2_{Y|X}$未知，所以我們以 MSE 估計 $\sigma^2_{Y|X}$便得到 b_0 變異數的估計值如下

$$\begin{aligned}S^2_{b_0}&=\left(\frac{1}{n}+\frac{\overline{X}^2}{SS_{xx}}\right)\text{MSE}\\&=\left(\frac{1}{10}+\frac{14^2}{568}\right)(191)\\&=85.0141\end{aligned}$$

(7) b_1 的變異數為$\left(\dfrac{1}{SS_{xx}}\right)\sigma^2_{Y|X}$，所以 b_1 變異數的估計值為

$$S^2_{b_1}=\left(\frac{1}{SS_{xx}}\right)\cdot\text{MSE}=\left(\frac{1}{568}\right)(191)=0.3363$$

(8) $H_0：\beta_1=0$

$H_1：\beta_1>0$

顯著水準 $\alpha=0.05$ 時，$t_{0.05}(8)=1.86$，檢定的拒絕域 R 為

$$R=\left\{\frac{b_1}{S_{b_1}}\,\middle|\,\frac{b_1}{S_{b_1}}>1.86\right\}$$

根據本題樣本資料

$$\frac{b_1}{S_{b_1}}=\frac{5}{\sqrt{0.3363}}=8.622>1.86$$

所以，檢定結果為拒絕 H_0。

(9) H_0：$\beta_0=0$

H_1：$\beta_0\neq 0$

顯著水準 $\alpha=0.05$ 時，$t_{0.025}(8)=2.306$，所以檢定的拒絕域 R 為

$$R=\left\{\frac{b_0}{S_{b_0}}\,\middle|\,\left|\frac{b_0}{S_{b_0}}\right|>2.306\right\}$$

根據本題樣本資料

$$\frac{b_0}{S_{b_0}}=\frac{60}{\sqrt{85.0141}}=6.508$$

所以，檢定結果為拒絕 H_0。

(10) $t_{0.025}(8)=2.306$，所以 β_0 的 95%信賴區間為

$$[b_0-2.306\,S_{b_0}\,,\,b_0+2.306\,S_{b_0}]$$

根據本題的樣本資料，這個區間為

$$[60-2.306\sqrt{85.0141}\,,\,60+2.306\sqrt{85.0141}]$$
$$=[38.738\,,\,81.262]$$

(11) β_1 的 95%信賴區間為

$$[b_1-2.306\,S_{b_1}\,,\,b_1+2.306\,S_{b_1}]$$

根據本題的樣本資料，這個區間為

$$[5-2.306\sqrt{0.3363}\,,\,5+2.306\sqrt{0.3363}]$$
$$=[-3.663\,,\,6.3373]$$

(12) $x=15$ 時，營業額平均值的 95%預測區間的上、下限為

$$(b_0+15b_1)-2.306\,S_{Y|X}\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{(15-\overline{X})^2}{SS_{xx}}}$$
$$(b_0+15b_1)+2.306\,S_{Y|X}\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{(15-\overline{X})^2}{SS_{xx}}}$$

根據本題的樣本資料，這個預測區間的上、下限為

$$135-2.306\,(13.82)\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{568}}=124.834$$
$$135+2.306\,(13.82)\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{568}}=145.166$$

(13) $x=15$ 時，營業額的 95%預測區間上、下限為

$$(b_0+15b_1)-2.306\,S_{Y|X}\sqrt{1+\frac{1}{10}+\frac{(15-\overline{X})^2}{SS_{xx}}}$$
$$(b_0+15b_1)+2.306\,S_{Y|X}\sqrt{1+\frac{1}{10}+\frac{(15-\overline{X})^2}{SS_{xx}}}$$

根據本題的樣本資料，這個預測區間的上、下限為

$$135-2.306\,(13.82)\sqrt{1+\frac{1}{10}+\frac{1}{568}}=101.549$$
$$135+2.306\,(13.82)\sqrt{1+\frac{1}{10}+\frac{1}{568}}=168.451$$