第 13 章

變異數分析

定義 *13-1-1*：實驗設計專有名詞

1. 實驗單位（experimental unit）

產生實驗結果的受試者或受試物件稱為實驗單位（或實驗材料）。

2. 實驗因子（experimental factor）

實驗者所操控的變項稱為實驗因子或獨立變項（independent variable），當實驗中只有一個因子時我們稱它為單因子實驗，有兩個因子時稱它為雙因子實驗，依此類推。

3. 水準（level）

實驗者在因子內所安排的各種不同狀況稱為該因子的水準。

4. 處理（treatment）

不同因子間各水準的組合稱為處理。但比較特別的是單因子實驗，由於它只有一個因子，所以在單因子實驗中，水準與處理代表相同的意義。

5. 反應（response）

實驗者在實驗單位上所測得的衡量稱為反應，衡量變項也稱為反應變項（response variable）或相依變項（dependent variable）。

定義 *13-2-1*：單因子設計的統計分析模式

$$x_{ij}=\mu+\tau_j+\varepsilon_{ij} \quad j=1,\cdots,k \quad , \quad i=1,\cdots,n_j$$

其中μ為共同效應，τ_j為第j個處理效應，ε_{ij}為第j個處理中第i個實單位的個別效應也可稱為個別差異或隨機效應，且

(1)$\varepsilon_{ij}\sim N(0,\sigma^2)$

(2)所有ε_{ij}間相互獨立

定義 *13-2-2*：單因子設計的H_0及H_1

H_0 ：$\mu_1=\cdots=\mu_k$(或$\tau_1=\cdots=\tau_k=0$)

H_1：H_0不成立

表 13-2-1　單因子設計的資料

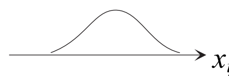
	處理 1	處理 2	…	處理 k
	x_{11} x_{21} $\vdots$ $x_{n_1 1}$	x_{12} x_{22} $\vdots$ $x_{n_2 2}$	…	x_{1k} x_{2k} $\vdots$ $x_{n_k k}$
樣本數	n_1	n_2	…	n_k
總和	$X_{\cdot 1}$	$X_{\cdot 2}$	…	$X_{\cdot k}$
平均數	$\bar{X}_{\cdot 1}$	$\bar{X}_{\cdot 2}$	…	$\bar{X}_{\cdot k}$
變異數	S_1^2	S_2^2	…	S_k^2
總樣本數$n=n_1+\cdots+n_k$　　總平均數$=\bar{X}_{\cdot\cdot}$				

單因子設計參數估計

(1)$\bar{X}_{\cdot\cdot}$為μ的估計量

(2)$\bar{X}_{\cdot j}$為μ_j的估計量

(3)$(\bar{X}_{\cdot j}-\bar{X}_{\cdot\cdot})$為$\tau_j=\mu_j-\mu$的估計量



$$x_{ij}=\mu_j+\varepsilon_{ij}=\mu+\tau_j+\varepsilon_{ij}$$
$$\varepsilon_{ij}\sim N(0,\sigma^2)$$

↓

擬定H_0、H_1

H_0：$\mu_1=\cdots=\mu_k$

H_1：H_0不成立

↓

實驗資料

處理	1	2	……	k
反應值	x_{11}	x_{12}	……	x_{1k}
	x_{21}	x_{22}	……	x_{2k}
	⋮	⋮		⋮
	x_{n_11}	x_{n_22}	……	x_{n_kk}
樣本數	n_1	n_2	……	n_k
平均數	$\bar{X}_1.$	$\bar{X}_2.$	……	$\bar{X}_k.$

↓

檢定統計量

ANOVA 表

來源	平方和	自由度	均方和	F 值
組間	SSB	k-1	MSB	$\frac{\text{MSB}}{\text{MSW}}$
組內	SSW	n-k	MSW	
總計	SST	n-1		

↓

H_0為真時，檢定統計量的抽樣分配

$$F=\frac{\text{MSB}}{\text{MSW}}\sim F(k-1,n-k)$$

↓

顯著水準α下的拒絕域

$$\frac{\text{MSB}}{\text{MSW}}>F_\alpha(k-1,n-k)$$

圖 13-2-1　單因子設計的檢定程序

定義 *13-2-3*：總平方和（SST , total sum of square）

在（13-2-4）等式左邊所代表的是每一筆資料與總平均之差異平方總和，簡稱為總平方和，並以符號 SST 表示。

$$SST=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij}-\overline{X}..)^2$$

且其自由度為$n-1=(n_1+\cdots+n_k)-1$

定義 *13-2-4*：組間平方和（SSB, between-group sum of square）

在（13-2-4）等式右邊第一項所代表的是各組（處理）平均與總平均之差異平方的加權總和，其中權數為各組樣本數（n_j），簡稱為組間平方和（或處理平方和），並以符號 SSB 表示。

$$SSB=\sum_{j=1}^{k}n_j(\overline{X}._j-\overline{X}..)^2$$

且其自由度為$k-1$

定義 *13-2-5*：組內平方和（SSW, within-group sum of square）

在（13-2-4）等式最右邊項所代表的是各組（處理）內的資料與該組平均數之差異平方總和，簡稱為組內平方和（或誤差平方和），並以符號 SSW 表示。

$$SSW=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij}-\overline{X}._j)^2$$

且其自由度為$n-k=(n_1-1)+\cdots+(n_k-1)$

定理 *13-2-1*：單因子設計平方和及自由度恆等式

平方和：SST = SSB + SSW

自由度：$n-1=(k-1)+(n-k)$

定義 *13-2-6*：組間均方和（MSB, between-group mean square）及組內均方和（MSW, within-group mean square）

$$組間均方和=\frac{組間平方和}{組間平方和自由度}=\frac{\text{SSB}}{k-1}$$

$$組內均方和=\frac{組內平方和}{組內平方和自由度}=\frac{\text{SSW}}{n-k}$$

表 13-2-3　單因子設計變異數分析表

來源	平方和	自由度	均方和	F 值
組間（或處理）	SSB	$k-1$	MSB	$\frac{\text{MSB}}{\text{MSW}}$
組內（或誤差）	SSW	$n-k$	MSW	
總計	SST	$n-1$		

定理 *13-2-2*：單因子設計檢定統計量之抽樣分配

若 $H_0\ (\mu_1=\cdots=\mu_k$ 或 $\tau_1=\cdots=\tau_k=0)$ 為真，則

$$\frac{\text{MSB}}{\text{MSW}}\sim F(k-1,n-k)$$

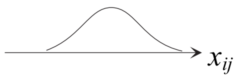
定義 *13-3-1*：區集設計的統計分析模式

$$x_{ij}=\mu+\alpha_i+\beta_j+\varepsilon_{ij}\quad i=1,\cdots,a\quad j=1,\cdots,b$$

其中 μ 為共同效應，α_i 為第 i 個區集效應，β_j 為第 j 個因子效應，ε_{ij} 為實驗單位的個別效應（也稱為個別差異或隨機效應），且

(1) $\varepsilon_{ij}\sim N(0,\sigma^2)$

(2) 所有 ε_{ij} 間相互獨立



$$x_{ij}=\mu+\alpha_i+\beta_j+\varepsilon_{ij}$$
$$\varepsilon_{ij}\sim N(0,\sigma^2)$$

擬定H_0、H_1

1. $H_0：\beta_1=\cdots=\beta_b=0$

   $H_1：H_0$ 不成立

2. $H_0：\alpha_1=\cdots=\alpha_a=0$

   $H_1：H_0$ 不成立

實驗資料

		處理					
		1	2	$\cdots$	b	樣本數	平均數
區集	1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1b}	b	$\overline{X}_{1\cdot}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	a	x_{a1}	x_{a2}	$\cdots$	x_{ab}	b	$\overline{X}_{a\cdot}$
樣本數		a	a	$\cdots$	a		
平均數		$\overline{X}_{\cdot 1}$	$\overline{X}_{\cdot 2}$	$\cdots$	$\overline{X}_{\cdot b}$		$\overline{X}_{\cdot\cdot}$

檢定統計量

ANOVA 表

來源	平方和	自由度	均方和	F 值
處理	SSTR	$b-1$	MSTR	$\frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}$
區集	SSBL	$a-1$	MSBL	$\frac{\text{MSBL}}{\text{MSE}}$
誤差	SSE	$(b-1)(a-1)$	MSE	
總計	SST	$ab-1$		

H_0為真時，檢定統計量的抽樣分配

1、$\frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}\sim F(b-1,(b-1)(a-1))$

2、$\frac{\text{MSBL}}{\text{MSE}}\sim F(a-1,(b-1)(a-1))$

顯著水準α時之拒絕域

1、$\frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}>F_\alpha(b-1,(b-1)(a-1))$

2、$\frac{\text{MSBL}}{\text{MSE}}>F_\alpha(a-1,(b-1)(a-1))$

圖 13-3-1　區集設計的檢定程序

13-3-2：區集設計的虛無假設及對應假設

(1)因子效應

H_0：$\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_b=0$

H_1：至少有一$\beta_j\neq 0$

(2)區集效應

H_0：$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_a=0$

H_1：至少有一$\alpha_i\neq 0$

表 13-3-1　區集設計的資料表

區集	因子						
	水準 1	水準 2	…	水準 b	樣本數	總和	平均數
區集 1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1b}	b	$X_{1}.$	$\bar{X}_{1}.$
區集 2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2b}	b	$X_{2}.$	$\bar{X}_{2}.$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
區集 a	x_{a1}	x_{a2}	…	x_{ab}	b	$X_{a}.$	$\bar{X}_{a}.$
樣本數	a	a	…	a	ab		
總和	$X._1$	$X._2$	…	$X._b$		$X..$	
平均數	$\bar{X}._1$	$\bar{X}._2$	…	$\bar{X}._b$			$\bar{X}..$

區集設計的參數估計

(1)$\bar{X}..$ 為μ的估計量

(2)$\left(\bar{X}_i.-\bar{X}..\right)$為$\alpha_i$的估計量

(3)$\left(\bar{X}._j-\bar{X}..\right)$為$\beta_j$的估計量

定義 ***13-3-3***：總平方和（SST, total sum of square）

在（13-3-4）恆等式左邊所代表的是每一筆資料與全體總平均之差異

平方的總和，簡稱為總平方和，並以符號 SST 表示，其自由度為 $(ab-1)$

$$SST=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(x_{ij}-\overline{X}..)^2$$

定義 *13-3-4*：區集平方和（SSBL,sum of square between block）

在（13-3-4）恆等式右邊第一式所代表的是各區集平均與總平均之差異平方的加權總和，其中權數為各區集內的樣本數(b)，簡稱為區集平方和，並以符號 SSBL 表示，它的自由度為$(a-1)$

$$SSBL=b\sum_{i=1}^{a}(\overline{X}_i.-\overline{X}..)^2$$

定義 *13-3-5*：處理平方和（SSTR, sum of square between treatment）

在（13-3-4）恆等式右邊第二式所代表的是因子中各水準（處理）的平均與總平均之差異平方的加權總和，其中權數為各水準內的樣本數(a)，簡稱為處理平方和，並以符號 SSTR 表示，它的自由度為$(b-1)$

$$SSTR=a\sum_{j=1}^{b}(\overline{X}_{.j}-\overline{X}..)^2$$

定義 *13-3-6*：誤差平方和（SSE, error sum of square）

在（13-3-4）恆等式右邊最後一式所代表的是每個實驗單位反應值的誤差項平方和，也就是每個實驗單位反應值扣除共同效應、區集效應及因子效應後的平方總和，簡稱為誤差平方和，並以符號SSE表示，它的自由度為$(a-1)\ (b-1)$

$$SSE=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(x_{ij}-\overline{X}_i.-\overline{X}_{.j}+\overline{X}..)^2$$

定理 *13-3-1*：區集設計平方和及自由度恆等式

平方和：SST = SSBL + SSTR + SSE

自由度：$ab-1=(a-1)+(b-1)+(a-1)(b-1)$

定義 *13-3-7*：區集均方和（MSBL, between-blocks mean square）

處理均方和（MSTR, between-treatments mean square）

誤差均方和（MSE, error mean square）

$$\text{區集均方和}=\frac{\text{區集平方和}}{\text{區集平方和自由度}}=\frac{\text{SSBL}}{a-1}$$

$$\text{處理均方和}=\frac{\text{處理平方和}}{\text{處理平方和自由度}}=\frac{\text{SSTR}}{b-1}$$

$$\text{誤差均方和}=\frac{\text{誤差平方和}}{\text{誤差平方和自由度}}=\frac{\text{SSE}}{(a-1)(b-1)}$$

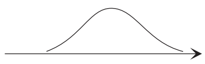
表 13-3-3 區集設計變異數分析表

來源	平方和	自由度	均方和	F 值
處理	SSTR	$b-1$	MSTR	$\frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}$
區集	SSBL	$a-1$	MSBL	$\frac{\text{MSBL}}{\text{MSE}}$
誤差	SSE	$(a-1)(b-1)$	MSE	
總計	SST	$ab-1$		

定理 *13-3-2*：區集設計檢定統計量之抽樣分配

(1) 若 H_0：$\beta_1=\cdots=\beta_b=0$ 為真，則$\frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}\sim F(b-1,(a-1)(b-1))$

(2) 若 H_0：$\alpha_1=\cdots=\alpha_a=0$，則$\frac{\text{MSBL}}{\text{MSE}}\sim F(a-1,(a-1)(b-1))$


x_{ij}

$x_{ijk}=\mu+\alpha_i+\beta_j+(\alpha\beta)_{ij}+\varepsilon_{ijk}$

$\varepsilon_{jik}\sim N(0,\sigma^2)$

擬定H_0、H_1

1. H_0：$\alpha_1=\cdots\alpha_a=0$
   H_1：至少有一$\alpha_i\neq0$
2. H_0：$\beta_1=\cdots=\beta_b=0$
   H_1：至少有一$\beta_j\neq0$
3. H_0：$(\alpha\,\beta)_{ij}=0$
   H_1：至少有一$(\alpha\,\beta)_{ij}\neq0$

實驗資料

		B 因子			樣本數
		1	……	b	
A 因子	1	x_{111} ⋮ x_{11n}	……	x_{1b1} ⋮ x_{1bn}	bn
	⋮	⋮	……	⋮	⋮
	a	x_{a11} ⋮ x_{a1n}	……	x_{ab1} ⋮ x_{abn}	bn
樣本數		an	……	an	

檢定統計量

ANOVA 表

來源	平方和	自由度	均方和	F 值
A 因子	SSA	$a-1$	MSA	$\frac{\text{MSA}}{\text{MSE}}$
B 因子	SSB	$b-1$	MSB	$\frac{\text{MSB}}{\text{MSE}}$
交互作用	SSAB	$(a-1)(b-1)$	MSAB	$\frac{\text{MSAB}}{\text{MSE}}$
誤差	SSE	$ab(n-1)$	MSE	
總計	SST	$abn-1$		

H_0為真時，檢定統計量的抽樣分配

1. $\frac{\text{MSA}}{\text{MSE}}\sim F(a-1,ab(n-1))$
2. $\frac{\text{MSB}}{\text{MSE}}\sim F(b-1,ab(n-1))$
3. $\frac{\text{MSAB}}{\text{MSE}}\sim F((a-1)(b-1),ab(n-1))$

顯著水準α下之拒絕域

1. $\frac{\text{MSA}}{\text{MSE}}>F_\alpha(a-1,ab(n-1))$
2. $\frac{\text{MSB}}{\text{MSE}}>F_\alpha(b-1,ab(n-1))$
3. $\frac{\text{MSAB}}{\text{MSE}}>F_\alpha((a-1)(b-1),ab(n-1))$

圖 13-4-1　雙因子設計的檢定程序

定義 *13-4-1*：雙因子設計的統計分析模式

$$x_{ijk}=\mu+\alpha_i+\beta_j+(\alpha\beta)_{ij}+\varepsilon_{ijk} \qquad \begin{array}{l} i=1,\cdots,a \\ j=1,\cdots,b \\ k=1,\cdots,n \end{array}$$

其中 x_{ijk} 表示安排在 A 因子第 i 水準 B 因子第 j 水準實驗格中的第 k 個實驗單位反應值，這個反應值可分解為由 μ（共同效應）、α_i（A 因子第 i 水準效應）、β_j（B 因子第 j 水準效應）、$(\alpha\beta)_{ij}$（A 因子第 i 水準與 B 因子第 j 水準的交互作用）及 ε_{ijk}（實驗單位的個別效應）所組合而成。誤差項（個別效應）滿足以下條件

(1) $\varepsilon_{ijk}\sim N(0,\sigma^2)$

(2)所有 ε_{ijk} 間相互獨立

定義 *13-4-2*：雙因子設計的虛無假設及對應假設

(1) A 因子效應：

H_0：$\alpha_1=\cdots=\alpha_a=0$

H_1：至少有一個$\alpha_i\neq 0$

(2) B 因子效應：

H_0：$\beta_1=\cdots=\beta_b=0$

H_1：至少有一個$\beta_j\neq 0$

(3) AB 因子交互效應：

H_0：$(\alpha\beta)_{ij}=0 \quad i=1,\cdots,a \quad j=1,\cdots,b$

H_1：至少有一 $(\alpha\beta)_{ij}\neq 0$

表 13-4-1　雙因子設計資料表

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="4">B 因子</td><td rowspan="2">樣本數</td><td rowspan="2">總和</td><td rowspan="2">平均</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>$\cdots$</td><td>b</td></tr>
<tr><td rowspan="4">A
因
子</td><td rowspan="2">1</td><td>x_{111}
x_{112}
.
.
.
x_{11n}</td><td>x_{121}
x_{122}
.
.
.
x_{12n}</td><td>$\cdots$</td><td>x_{1b1}
x_{1b2}
.
.
.
x_{1bn}</td><td rowspan="2">bn</td><td rowspan="2">$X_{1..}$</td><td rowspan="2">$\bar{X}_{1..}$</td></tr>
<tr><td>$\bar{X}_{11.}$</td><td>$\bar{X}_{12.}$</td><td>$\cdots$</td><td>$\bar{X}_{1b.}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>x_{211}
x_{212}
.
.
.
x_{21n}</td><td>x_{221}
x_{222}
.
.
.
x_{22n}</td><td>$\cdots$</td><td>x_{2b1}
x_{2b2}
.
.
.
x_{2bn}</td><td rowspan="2">bn</td><td rowspan="2">$X_{2..}$</td><td rowspan="2">$\bar{X}_{2..}$</td></tr>
<tr><td>$\bar{X}_{21.}$</td><td>$\bar{X}_{22.}$</td><td>$\cdots$</td><td>$\bar{X}_{2b.}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">a</td><td>x_{a11}
x_{a12}
.
.
.
x_{a1n}</td><td>x_{a21}
x_{a22}
.
.
.
x_{a2n}</td><td>$\vdots$</td><td>x_{ab1}
x_{ab2}
.
.
.
x_{abn}</td><td rowspan="2">bn</td><td rowspan="2">$X_{a..}$</td><td rowspan="2">$\bar{X}_{a..}$</td></tr>
<tr><td>$\bar{X}_{a1.}$</td><td>$\bar{X}_{a2.}$</td><td>$\cdots$</td><td>$\bar{X}_{ab.}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">樣本數</td><td>an</td><td>an</td><td>$\cdots$</td><td>an</td><td>abn</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">總和</td><td>$X_{.1.}$</td><td>$X_{.2.}$</td><td>$\cdots$</td><td>$X_{.b.}$</td><td></td><td>$X_{...}$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">平均數</td><td>$\bar{X}_{.1.}$</td><td>$\bar{X}_{.2.}$</td><td>$\cdots$</td><td>$\bar{X}_{.b.}$</td><td></td><td></td><td>$\bar{X}_{...}$</td></tr>
</table>

雙因子設計參數估計：

(1) $\bar{X}...$ 為 μ 的估計量

(2) $(\bar{X}_i.. - \bar{X}...)$ 為 α_i 的估計量

(3) $(\bar{X}_{.j}. - \bar{X}...)$ 為 β_j 的估計量

(4) $(\bar{X}_{ij}. - \bar{X}_i.. - \bar{X}_{.j}. + \bar{X}...)$ 為 $(\alpha\beta)_{ij}$ 的估計量

其中(4)為第 i 列第 j 行交互作用的估計量，可視為該實驗格的平均值扣除（第 i 列效應＋第 j 行效應＋共同效應），也就是 $\bar{X}_{ij}. - (\bar{X}_i.. - \bar{X}...) - (\bar{X}_{.j}. - \bar{X}...) - \bar{X}...$

定義 *13-4-3*：雙因子設計總平方和（SST, total sum of square）

在（13-4-4）恒等式左邊所代表的是每一筆資料與全體總平均數之差異平方的總和，簡稱為總平方和，並以符號SST表示，它的自由度為（$abn-1$）

$$\mathrm{SST} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(x_{ijk} - \bar{X}...)^2$$

定義 *13-4-4*：雙因子設計 *A* 因子平方和（SSA, sum of squares between levels of factor A）

在（13-4-4）恒等式右邊第一式所代表的是每一列的平均數（A 因子每一水準的平均數）與總平均之差異平方的加權總和，其中權數為各列內的樣本數 bn，簡稱為 A 因子平方和，並以符號 SSA 表示，它的自由度為（$a-1$）

$$\mathrm{SSA} = bn\sum_{i=1}^{a}(\bar{X}_i.. - \bar{X}...)^2$$

定義 *13-4-5*：雙因子設計 *B* 因子平方和（SSB, sum of square between levels of factor B）

在（13-4-4）恒等式中右邊第二式所代表的是每一行的平均數（*B* 因子每一水準的平均數）與總平均之差異平方的加權總和，其中權數為各行內的樣本數 *an*，簡稱為 *B* 因子平方和，並以符號 SSB 表示，它的自由度為（*b*−1）

$$\mathrm{SSB} = an\sum_{j=1}^{b}(\overline{X}_{\cdot j\cdot} - \overline{X}_{\cdots})^2$$

定義 *13-4-6*：雙因子設計 *AB* 交互作用平方和（SSAB, sum of square owing to interactions）

在（13-4-4）恒等式右邊第三式所代表的是每一個實驗格平均數（*AB* 兩因子組合實驗格內的平均數）扣除共同效應及相對應的 *A*, *B* 兩因子效應後平方的加權總和，其中權數為該實驗格中的樣本數 *n*，簡稱為交互作用平方和，以符號 SSAB 表示，它的自由度為（*a*−1)(*b*−1）

$$\mathrm{SSAB} = n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\overline{X}_{ij\cdot} - \overline{X}_{i\cdot\cdot} - \overline{X}_{\cdot j\cdot} + \overline{X}_{\cdots})^2$$

定義 *13-4-7*：雙因子設計誤差平方和（SSE, error sum of squares）

在（13-4-4）恒等式右邊第四式所代表的是所有實驗值與它所屬的實驗格的平均數之差異的平方總和，簡稱為誤差平方和，以符號 SSE 表示，它的自由度為 *ab*（*n*−1）

$$\mathrm{SSE} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(x_{ijk} - \overline{X}_{ij\cdot})^2$$

定理 *13-4-1*：雙因子設計平方和及自由度恒等式

平方和：SST = SSA + SSB + SSAB + SSE

自由度：$abn - 1 = (a-1) + (b-1) + (a-1)(b-1) + ab(n-1)$

定義 *13-4-8*：*A* 因子均方和（MSA, mean squar for factor A），*B* 因子均方和（MSB, mean square for factor B），交互作用均方和（MSAB, mean square due to interaction），誤差均方和（MSE, error mean square）

$$A\text{ 因子均方和}=\frac{A\text{ 因子平方和}}{A\text{ 因子平方和自由度}}=\frac{\text{SSA}}{a-1}=\text{MSA}$$

$$B\text{ 因子均方和}=\frac{B\text{ 因子平方和}}{B\text{ 因子平方和自由度}}=\frac{\text{SSB}}{b-1}=\text{MSB}$$

$$\text{交互作用均方和}=\frac{\text{交互作用平方和}}{\text{交互作用平方和自由度}}=\frac{\text{SSAB}}{(a-1)(b-1)}=\text{MSAB}$$

$$\text{誤差均方和}=\frac{\text{誤差平方和}}{\text{誤差平方和自由度}}=\frac{\text{SSE}}{ab(n-1)}=\text{MSE}$$

表 13-4-3　雙因子設計變異數分析表

來源	平方和	自由度	均方和	*F* 值
A 因子	SSA	$a-1$	MSA	MSA ／ MSE
B 因子	SSB	$b-1$	MSB	MSB ／ MSE
交互作用	SSAB	$(a-1)(b-1)$	MSAB	MSAB ／ MSE
誤差	SSE	$ab(n-1)$	MSE	
總計	SST	$abn-1$		

定理 *13-4-2*：雙因子設計檢定統計量之抽樣分配

(1) A 因子效應檢定：

H_0：$\alpha_1=\cdots=\alpha_a=0$

H_1：至少有一個 $\alpha_i\neq 0$

當 H_0 為真時，檢定統計量 $\dfrac{\text{MSA}}{\text{MSE}}$ 之抽樣分配為

$$F=\frac{\text{MSA}}{\text{MSE}}\sim F(a-1\,,ab(n-1))$$

(2) B 因子效應檢定：

H_0：$\beta_1 = \cdots = \beta_b = 0$

H_1：至少有一個 $\beta_j \neq 0$

當 H_0 為真時，檢定統計量 $\dfrac{\text{MSB}}{\text{MSE}}$ 之抽樣分配為

$$F = \frac{\text{MSB}}{\text{MSE}} \sim F(b-1, ab(n-1))$$

(3) AB 因子交互作用效應檢定：

H_0：$(\alpha\beta)_{ij} = 0 \qquad i = 1, \cdots, a \qquad j = 1, \cdots, b$

H_1；至少有一個 $(\alpha\beta)_{ij} \neq 0$

當 H_0 為真時，檢定統計量 $\dfrac{\text{MSAB}}{\text{MSE}}$ 之抽樣分配為

$$F = \frac{\text{MSB}}{\text{MSE}} \sim F((a-1)(b-1), \quad ab(n-1))$$

13.1 單因子設計 $x_{ij}=\mu+\tau_j+\varepsilon_{ij}$，$i=1,\cdots,5\ \ j=1,2,3$。樣本資料如表 E-13-1-1 所示。

表 E-13-1-1

1	2	3
13	12	11
15	14	13
17	16	15
19	18	17
21	20	19

(1) μ 的估計值。

(2) μ_j 的估計值。

(3) τ_j 的估計值。

(4) x_{ij} 的估計式。

(5)將 x_{23} 以(4)式表示。

(6)計算 ANOVA 表。

解：

本題的試算表如表 E-13-1-2 所示

表 E-13-1-2

	1	2	3	
	13	12	11	
	15	14	13	
	17	16	15	
	19	18	17	
	21	20	19	
樣本數	5	5	5	15
總和	85	80	75	240
平均	17	16	15	16
變異數	10	10	10	

⑴$\overline{X}..$ 為μ的估計量，由試算表 E-13-1-2 得知μ的估計值為 16。

⑵$\overline{X}._j$ 為μ_j的估計量，由試算表 E-13-1-2 得知μ_1估計值為 17，μ_2的估計值為 16，μ_3的估計值為 15。

⑶$(\overline{X}._j-\overline{X}..)$為$\tau_j$的估計量，由試算表 E-13-1-2 得知$\tau_1$的估計值為$(\overline{X}._1-\overline{X}..)=(17-16)=1$，$\tau_2$的估計值為$(\overline{X}._2-\overline{X}..)=(16-16)=0$，$\tau_3$的估計值為$(\overline{X}._3-\overline{X}..)=(15-16)=-1$。

⑷x_{ij}的估計式為$x_{ij}=\overline{X}..+(\overline{X}._j-\overline{X}..)+(x_{ij}-\overline{X}._j)$，其中

$$\overline{X}..=16$$
$$\overline{X}._1=17$$
$$\overline{X}._2=16$$
$$\overline{X}._3=15$$

⑸$x_{23}=\overline{X}..+(\overline{X}._3-\overline{X}..)-(\overline{x}_{23}-\overline{X}._3)$，所以 x_{23}可表示成

$$13=16+(15-16)+(13-15)$$

⑹$\text{SST}=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{5}(x_{ij}-\overline{X}..)^2=130$

$\text{SSB}=\sum_{j=1}^{3}5(\overline{X}._j-\overline{X}..)^2=10$

$\text{SSW}=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{5}(x_{ij}-\overline{X}._j)=120$

ANOVA 表

來源	平方和	自由度	均方和	F 值
組間	10	2	5	0.5
組內	120	12	10	
總計	130	14		

13.2 單因子設計$x_{ij}=\mu+\tau_j+\varepsilon_{ij}$，$i=1,\cdots,5$ $j=1,2,3$。樣本資料如表 E-13-2-1 所示。

表 E-13-2-1

1	2	3
13	17	21
15	19	23
17	21	25
19	23	27
21	25	29

(1)μ 的估計值。
(2)μ_j的估計值。
(3)τ_j的估計值。
(4)x_{ij}的估計式。
(5)將x_{41}以(4)的估計式表示。
(6)計算 ANOVA 表。

解：

本題的試算表如表 E-13-2-2 所示

表 E-13-2-2

	1	2	3	
	13 15 17 19 21	17 19 21 23 25	21 23 25 27 29	
樣本數	5	5	5	15
總和	85	105	125	315
平均	17	21	25	21
變異數	10	10	10	

⑴$\overline{X}..$為μ的估計量，由試算表 E-13-2-2 得知μ的估計值為 21。

⑵$\overline{X}._j$為μ_j的估計量，由試算表 E-13-2-2 得知μ_1估計值為 17，μ_2的估計值為 21，μ_3的估計值為 25。

⑶$(\overline{X}._j-\overline{X}..)$為$\tau_j$的估計量，由試算表 E-13-2-2 得知$\tau_1$的估計值為$(17-21)=-4$，$\tau_2$的估計值為$(21-21)=0$，$\tau_3$的估計值為$(25-21)=4$。

⑷x_{ij}的估計式為$x_{ij}=\overline{X}..+(\overline{X}._j-\overline{X}..)+(x_{ij}-\overline{X}._j)$，其中

$$\overline{X}..=21$$
$$\overline{X}._1=17$$
$$\overline{X}._2=21$$
$$\overline{X}._3=25$$

⑸$x_{41}=\overline{X}..+(\overline{X}._1-\overline{X}..)+(x_{41}-\overline{X}._1)$，所以 x_{41}可表示成

$$19=21+(17-21)+(19-17)$$

⑹$\text{SST}=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{5}(x_{ij}-\overline{X}..)^2=280$

$\text{SSB}=\sum_{j=1}^{3}5(X._j-\overline{X}..)^2=160$

$\text{SSW}=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{5}(x_{ij}-\overline{X}._j)=120$

ANOVA 表

來源	平方和	自由度	均方和	F 值
組間	160	2	80	8
組內	120	12	10	
總計	280	14		

13.3 欲檢定 3 個母群體的平均數是否皆相等，隨機抽取 3 組獨立樣本如表 E-13-3-1 所示。

表 E-13-3-1

1	2	3
23	25	45
25	56	28
34	45	57
45	38	87
36	65	56
	54	76
		43

(1)估計共同效應值。

(2)估計每個母群體的效應值。

(3)在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，檢定三個母群體的平均數是否相等。

(4)(3)的檢定結果可能受到何種扭曲。

解：

本題的試算表如表 E-13-3-2 所示。

表 E-13-3-2

	1	2	3	
	23	25	45	
	25	56	28	
	34	45	57	
	45	38	87	
	36	65	56	
		54	76	
			43	
樣本數	5	6	7	18
總和	163	283	392	838
平均	32.6	47.17	56	46.56
變異數	79.3	204.6	406	

⑴共同效應的估計量為$\overline{X}..$，由試算表 E-13-3-2 得知共同效應值為 46.56。

⑵每個母群體的效應值的估計量為$(\overline{X}._j-\overline{X}..)$，由試算表 E-13-3-2 得知，第一母群體的效應估計值為(32.6－46.56)＝－13.96，第二母群體效應的估計值為(47.17－46.56)＝0.61，第三母群體效應的估計值為(56－46.56)＝9.44。

⑶H_0：$\mu_1=\mu_2=\mu_3$

H_1：H_0不成立

其中μ_i為第i母群體的平均數。本題的 ANOVA 表如表 E-13-3-3 所示

表 E-13-3-3

來源	平方和	自由度	均方和	F 值
組間	1600.41	2	800.21	3.18
組內	3776.03	15	251.74	
總計	5376.44	17		

其中

$$\text{SST}=\sum_{i=1}^{5}(X_{i1}-\overline{X}..)^2+\sum_{i=1}^{6}(X_{i2}-\overline{X}..)^2+\sum_{i=1}^{7}(X_{i3}-\overline{X}..)^2=5376.44$$

$$\text{SSB}=5(32.6-46.56)^2+6(47.17-46.56)^2+7(56-46.56)^2=1600.41$$

$$\text{SSW}=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij}-\overline{X}._j)^2=(5-1)(79.3)+(6-1)(204.6)+(7-1)(406)=3776.03$$

$\alpha=0.05$，$F_{0.05}(2,15)=3.68$，所以這個檢定的拒絕域 R 為

$$R=\left\{\frac{\text{MSB}}{\text{MSW}}\;\middle|\;\frac{\text{MSB}}{\text{MSW}}>3.68\right\}$$

由表 E-13-3-3 得知檢定值$\dfrac{\text{MSB}}{\text{MSW}}=3.18<3.68$，所以檢定結果為不拒絕$H_0$，這表示這三個母群體的平均數無差異或這三個母群體的效應並不明顯。

⑷從試算表 E-13-3-2 得知，三組資料所計算得到的變異數分別為 79.3，204.6 及 406。顯然與變異數分析的基本假設所要求的各母群體變異數皆相等不太

相符，所以(3)的檢定結果可能會因此而遭到扭曲。

13.4 隨機安排 A、B、C 三種車款進行單因子實驗設計，加滿油箱後記錄它們耗完汽油能跑的里程數如表 E-13-4-1 所示。

表 E-13-4-1

A	B	C
554	562	568
556	561	566
558	560	565
557	563	567
555	564	564

(1)估計三種車款的耗油共同效應值。

(2)估計各車款的耗油效應值。

(3)在 $\alpha = 0.05$ 下，檢定三款車的平均里程是否相等。

解：

本題的試算表如表 E-13-4-2 所示。

表 E-13-4-2

	A	B	C	
	554	562	568	
	556	561	566	
	558	560	565	
	557	563	567	
	555	564	564	
樣本數	5	5	5	15
總和	2780	2810	2830	8420
平均	556	562	566	561.33
變異數	2.5	2.5	2.5	

⑴三種車款共同效應的估計量為$\bar{X}..$，由試算表 E-13-4-2 得知其共同效應估計值為 561.33。

⑵各種車款的效應估計量為$(\bar{X}._j - \bar{X}..)$，由試算表 E-13-4-2 得知，A 款車的效應估計值為$(556-561.33)=-5.33$，B 款車的效應估計值為$(562-561.33)=0.67$，C 款車的效應估計值為$(566-561.33)=4.67$。

⑶以μ_A、μ_B、μ_C表示 A、B、C 三款車的平均里程，所以本題的H_0及 H_1 為

$$H_0：\mu_A=\mu_B=\mu_C$$

$$H_1：H_0\text{不成立}$$

$$\text{SST}=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{5}(x_{ij}-\bar{X}..)^2=283.33$$

$$\text{SSB}=\sum_{j=1}^{3}5(\bar{X}._j-\bar{X}..)^2=253.33$$

$$\text{SSW}=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{5}(x_{ij}-\bar{X}._j)^2=30$$

所以，本題的 ANOVA 表如表 E-13-4-3 所示

表 E-13-4-3

來源	平方和	自由度	均方和	F 值
組間	253.33	2	126.67	50.67
組內	30	12	2.5	
總計	283.33	14		

$\alpha=0.05$，$F_{0.05}(2,12)=3.89$。所以這個檢定的拒絕域為

$$R=\left\{\frac{\text{MSB}}{\text{MSW}}\;\middle|\;\frac{\text{MSB}}{\text{MSW}}>3.89\right\}$$

由表E-13-4-3 得知，檢定值$\dfrac{\text{MSB}}{\text{MSW}}=50.67>3.89$，所以檢定的結果為拒絕$H_0$，這表示 A、B、C 三款車的耗油性能顯著不全相等。

13.5 隨機抽樣三種產業內的廠商並記錄其年獲利率如表 E-13-5-1 所示。

表 E-13-5-1

1	2	3
0.13	0.18	0.33
0.09	0.2	0.32
0.11	0.17	0.34
0.16	0.14	0.37
0.12	0.16	0.38

⑴估計這三種產業在獲利率上的共同效應值。

⑵估計各產業在獲利率上的效應值。

⑶在 $\alpha = 0.05$ 下，檢定這三種產業的平均獲利率是否相等。

解：

本題的試算表如表 E-13-5-2 所示。

表 E-13-5-2

	1	2	3	
	0.13	0.18	0.33	
	0.09	0.2	0.32	
	0.11	0.17	0.34	
	0.16	0.14	0.37	
	0.12	0.16	0.38	
樣本數	5	5	5	15
總和	0.61	0.85	1.74	3.2
平均數	0.122	0.17	0.348	0.213
變異數	0.00067	0.0005	0.00067	

⑴三種產業在獲利率上的共同效應估計量為 $\overline{X}_{..}$，由試算表 E-13-5-2 得知其共

同效應值為 0.213。

⑵各產業在獲利率上的效應值為 $(\overline{X}._j-\overline{X}..)$，由試算表 E-13-5-2 得知，產業 1 的獲利率效應值為(0.122 − 0.213) = − 0.091，產業 2 的獲利率的效應值為(0.17 − 0.213) = − 0.043，產業 3 的獲利率效應值為(0.348 − 0.213) = 0.135。

⑶以 μ_1、μ_2、μ_3 表示三產業的平均獲利率。

$$H_0：\mu_1=\mu_2=\mu_3$$

$$H_1：H_0\text{不成立}$$

$$\text{SST}=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{5}(x_{ij}-\overline{X}..)^2=0.149$$

$$\text{SSB}=\sum_{j=1}^{3}5(\overline{X}._j-\overline{X}..)^2=0.142$$

$$\text{SSW}=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{5}(x_{ij}-\overline{X}._j)^2=0.007$$

所以本題的 ANOVA 表如表 E-13-5-3 所示

表 E-13-5-3

來源	平方和	自由度	均方和	F 值
組間	0.142	2	0.071	115.58
組內	0.007	12	0.0006	
總計	0.149	14		

$\alpha=0.05$，$F_{0.05}(2,12)=3.89$。所以這個檢定的拒絕域 R 為

$$R=\left\{\frac{\text{MSB}}{\text{MSE}}\,\middle|\,\frac{\text{MSB}}{\text{MSE}}>3.89\right\}$$

由表 E-13-5-3 得知，檢定值 $\frac{\text{MSB}}{\text{MSE}}=115.58>3.89$，所以檢定的結果為拒絕 H_0，這表示三產業的獲利能力顯著不全相等。

13.6 以單因子設計比較三種材質的強力鋼板抗壓強度，實驗得到的抗壓強度（單位為公斤／平方公尺）資料如表 E-13-6-1 所示。

表 E-13-6-1

材質一	材質二	材質三
1200	1380	1270
1300	1140	1370
1260	1290	1320
1500	1450	1520
1660	1350	1550
1440		1210

⑴估計三種材質在抗壓強度上的共同效應值。

⑵估計各種材質在抗壓強度上的效應值。

⑶在 $\alpha=0.05$ 下，檢定這三種材質平均抗壓強度是否相等。

解：

本題的試算表如表 E-13-6-2 所示。

表 E-13-6-2

	材質一	材質二	材質三	
	1200	1380	1270	
	1300	1140	1370	
	1260	1290	1320	
	1500	1450	1520	
	1660	1350	1550	
	1440		1210	
樣本數	6	5	6	17
總和	8360	6610	8240	23210
平均	1393.3	1322	1373.3	1365.3
變異數	29706	13670	18586	

⑴三種材質在抗壓強度上的共同效應估計量為$\overline{X}..$，由試算表 E-13-6-2 得知，共同效應估計值為 1365.3。

⑵各種材質抗壓效應的估計量為$(\overline{X}._j-\overline{X}..)$，由試算表 E-13-6-2 得知，材質一的抗壓效應為$(1393.3-1365.3)=28$，材質二的抗壓效應為$(1322-1365.3)=-43.3$，材質三的抗壓效應為$(1373.3-1365.3)=8$。

⑶以μ_1、μ_2、μ_3表示三種材質的抗壓平均數

$$H_0：\mu_1=\mu_2=\mu_3$$

$$H_1：H_0\text{不成立}$$

$$\text{SST}=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij}-\overline{X}..)^2=310623$$

$$\text{SSB}=n_1(\overline{X}._1-\overline{X}..)^2+n_2(\overline{X}._2-\overline{X}..)^2+n_3(\overline{X}._3-\overline{X}..)^2=14476$$

$$\text{SSW}=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij}-\overline{X}._j)^2=296147$$

所以本題的 ANOVA 表如表 E-13-6-3 所示

表 E-13-6-3

來源	平方和	自由度	均方和	F 值
組間 組內	14476 296147	2 14	7238.4 21153.3	0.34
總計	310623	16		

$\alpha=0.05$，$F_{0.05}(2,14)=3.74$ 。所以這個檢定的拒絕域 R 為

$$R=\left\{\frac{\text{MSB}}{\text{MSW}}\,\middle|\,\frac{\text{MSB}}{\text{MSW}}>3.74\right\}$$

由表 E-13-6-3 得知，檢定值$\dfrac{\text{MSB}}{\text{MSW}}=0.34<3.74$，所以檢定的結果為不拒絕

H_0 ，這表示這三種材質鋼板的抗壓強度並無顯著差異。

13.7 區集設計 $x_{ij}=\mu+\alpha_i+\beta_j+\varepsilon_{ij}$，$i=1,\cdots,6$　$j=1,2,3$。樣本資料如表 E-13-7-1 所示。

表 E-13-7-1

		處　理		
		1	2	3
區集	1	15	15	18
	2	14	14	14
	3	10	11	15
	4	13	12	17
	5	16	13	16
	6	13	13	13

(1) μ 的估計值。

(2) α_i, β_j 的估計值。

(3) x_{ij} 的估計式。

(4)將 x_{32} 以(3)式表示。

(5)計算 ANOVA 表。

(6)估計誤差項 ε_{ij} 的變異數 σ^2 。

解：

本題的試算表如表 E-13-7-2 所示。

表 E-13-7-2

		處理 1	處理 2	處理 3	樣本數	總和	平均數
區集	1	15	15	18	3	48	16
	2	14	14	14	3	42	14
	3	10	11	15	3	36	12
	4	13	12	17	3	42	14
	5	16	13	16	3	45	15
	6	13	13	13	3	39	13
樣本數		6	6	6	18		
總和		81	78	93		252	
平均數		13.5	13	15.5			14

(1)$\overline{X}..$為μ的估計量，由表 E-13-7-2 得知μ的估計值為 14。

(2)α_i及β_j的估計量分別為$(\overline{X}_i. - \overline{X}..)$及$(\overline{X}._j - \overline{X}..)$，由表 E-13-7-2 得知，

α_1的估計值為$(16-14)=2$

α_2的估計值為$(14-14)=0$

α_3的估計值為$(12-14)=-2$

α_4的估計值為$(14-14)=0$

α_5的估計值為$(15-14)=1$

α_6的估計值為$(13-14)=-1$

β_1的估計值為$(13.5-14)=-0.5$

β_2的估計值為$(13-14)=-1$

β_3的估計值為$(15.5-14)=1.5$

(3)$x_{ij}=14+(\overline{X}_i.-14)+(\overline{X}._j-14)+(x_{ij}-\overline{X}_i.-\overline{X}._j+14)$

(4)$x_{32}=14+(\overline{X}_3.-14)+(\overline{X}._2-14)+(x_{32}-\overline{X}_3.-\overline{X}._2+14)$

$=14+(12-14)+(13-14)+(11-12-13+14)$

所以，

$11=14+(-2)+(-1)+(0)$

(5) $SST=\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{3}(x_{ij}-\bar{X}..)^2=70$

$SSBL=3\sum_{i=1}^{6}(\bar{X}_i.-\bar{X}..)^2=30$

$SSTR=6\sum_{j=1}^{3}(X._j-\bar{X}..)^2=21$

$SSE=\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{3}(x_{ij}-\bar{X}_i.-\bar{X}._j+\bar{X}..)^2=19$

所以本題的 ANOVA 表如表 E-13-7-3 所示。

表 E-13-7-3

來源	平方和	自由度	均方和	*F* 值
處理	21	2	10.5	5.53
區集	30	5	6	3.16
誤差	19	10	1.9	
總計	70	17		

(6) σ^2 的估計值為 MSE = 1.9。

13.8 欲檢定三種文字處理系統所需的學習時間，以區集設計安排具有同質性的操作員進行實驗，他們熟習操作這三種文字處理系統的學習時間（小時）如表 E-13-8-1 所示。

表 E-13-8-1

		文字處理系統		
		1	2	3
區集（操作員）	1	16	16	24
	2	19	17	22
	3	14	13	19
	4	13	12	18
	5	18	17	22

⑴估計這三種文字處理系統在學習時間上的共同效應。

⑵估計各文字處理系統在學習時間上的效應值。

⑶估計操作員在學習時間上所產生的干擾效應值。

⑷在 $\alpha=0.05$ 下，檢定三種文字處理系統在學習時間上是否有差異，並檢定操作員操作能力在學習時間上是否有效應。

解：

本題的試算表如表 E-13-8-2 所示。

表 E-13-8-2

		文字處理系統			樣本數	總和	平均數
		1	2	3			
區集	1	16	16	24	3	56	18.66667
	2	19	17	22	3	58	19.33333
	3	14	13	19	3	46	15.33333
	4	13	12	18	3	43	14.33333
	5	18	17	22	3	57	19
樣本數		5	5	5	15		
總和		80	75	105		260	
平均數		16	15	21			17.33333

⑴$\overline{X}..$為共同效應的估計量，由試算表 E-13-8-2 得知其估計值為 17.3

⑵三種文字處理系統在學習時間上的效應（β_j）的估計量為（$\overline{X}._j-\overline{X}..$），所以

第一種文字處理系統的學習時間效應為$(16-17.3)=-1.3$

第二種文字處理系統的學習時間效應為$(15-17.3)=-2.3$

第三種文字處理系統的學習時間效應為$(21-17.3)=3.7$

⑶操作員能力在學習時間上的效應（α_i）的估計量為（$\overline{X}_i.-\overline{X}..$），所以

第一區集操作員的學習效應估計值為$(18.7-17.3)=1.4$

第二區集操作員的學習效應估計值為$(19.3-17.3)=2$

第三區集操作員的學習效應估計值為$(15.3-17.3)=-2$

第四區集操作員的學習效應估計值為$(14.3-17.3)=-3$

第五區集操作員的學習效應估計值為$(19-17.3)=1.7$

(4)$\text{SST}=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3}(x_{ij}-\overline{X}..)^2=175.33$

$\text{SSBL}=3\sum_{i=1}^{5}(\overline{X}_i.-\overline{X}..)^2=64.67$

$\text{SSTR}=5\sum_{j=1}^{3}(\overline{X}_{.j}-\overline{X}..)^2=103.33$

$\text{SSE}=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3}(x_{ij}-\overline{X}_i.-\overline{X}_{.j}+\overline{X}..)^2=7.33$

所以，本題的 ANOVA 表如表 E-13-8-3 所示

表 E-13-8-3

來源	平方和	自由度	均方和	F 值
處理	103.33	2	51.67	56.36
區集	64.67	4	16.17	17.64
誤差	7.33	8	0.92	
總計	175.33	14		

以β_j表示文字處理的學習時間效應，以α_i表示操作員的學習時間效應。

H_0：$\beta_1=\beta_2=\beta_3=0$

H_1：H_0不成立

$\alpha=0.05$，$F_{0.05}(2,8)=4.46$，所以這個檢定的拒絕域 R 為

$$R=\left\{\frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}\;\middle|\;\frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}>4.46\right\}$$

由表 E-13-8-3 得知，檢定值$\dfrac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}=56.36>4.46$，所以檢定結果為拒絕$H_0$，

這表示三種文字處理系統所需的學習時間有顯著差異。

$$H_0：\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=0$$

$$H_1：H_0\text{不成立}$$

$\alpha=0.05$，$F_{0.05}(4,8)=3.84$，所以這個檢定值的拒絕域 R 為

$$R=\left\{\frac{\text{MSBL}}{\text{MSE}}\ \middle|\ \frac{\text{MSBL}}{\text{MSE}}>3.84\right\}$$

由表 E-13-8-3 得知，檢定值 $\frac{\text{MSBL}}{\text{MSE}}=17.64>3.84$，所以檢定的結果為拒絕 H_0，這表示操作員的操作能力顯著干擾學習所需的時間。

13.9 雙因子設計 $x_{ijk}=\mu+\alpha_i+\beta_j+(\alpha\beta)_{ij}+\varepsilon_{ijk}$，$i=1,2,3$　$j=1,2,3$　$k=1,2$。樣本資料如表 E-13-9-1 所示。

表 E-13-9-1

		B 因子		
		1	2	3
A 因子	1	500	540	480
		580	460	400
	2	460	560	420
		540	620	480
	3	560	600	480
		600	580	410

(1) μ 的估計值。

(2) α_i,β_j 的估計值。

(3) $(\alpha\beta)_{ij}$ 的估計值。

(4) x_{ijk} 的估計式。

(5) x_{231} 以(4)式表示。

(6)計算 ANOVA 表。

(7)估誤 ε_{ijk} 的變異數 σ^2 。

解：

本題的試算表如表 E-13-9-2 所示。

表 E-13-9-2

		B 因子			樣本數	總和	平均數
		1	2	3			
A 因子	1	500 580	540 460	480 400			
		540	500	440	6	2960	493.3333
	2	460 540	560 620	420 480			
		500	590	450	6	3080	513.3333
	3	560 600	600 580	480 410			
		580	590	445	6	3230	538.3333
樣本數		6	6	6	18		
總和		3240	3360	2670		9270	
平均數		540	560	445			515

(1)$\overline{X}...$為 μ 的估計量，由表 E-13-9-2 得知其估計值為 515。

(2)α_i 及 β_j 的估計量分別為$(\overline{X}_i.. - \overline{X}...)$及$(\overline{X}_{.j}. - \overline{X}...)$，由表 E-13-9-2 得知，

α_1的估計值為$(493.3 - 515) = -21.7$

α_2的估計值為$(513.3 - 515) = -1.7$

α_3的估計值為$(538.3 - 515) = 23.3$

β_1的估計值為$(540 - 515) = 25$

β_2的估計值為$(560 - 515) = 45$

β_3的估計值為$(445 - 515) = -70$

(3)$(\alpha\beta)_{ij}$的估計量為$(\overline{X}_{ij}. - \overline{X}_{i}.. - \overline{X}_{.j}. + \overline{X}...)$，由表 E-13-9-2 得知

$(\alpha\beta)_{11}$的估計值為$(540-540-493.3+515)=21.7$

$(\alpha\beta)_{12}$的估計值為$(500-560-493.3+515)=-38.3$

$(\alpha\beta)_{13}$的估計值為$(440-445-493.3+515)=16.7$

$(\alpha\beta)_{21}$的估計值為$(500-540-513.3+515)=-38.3$

$(\alpha\beta)_{22}$的估計值為$(590-560-513.3+515)=31.7$

$(\alpha\beta)_{23}$的估計值為$(450-445-513.3+515)=6.7$

$(\alpha\beta)_{31}$的估計值為$(580-540-538.3+515)=16.7$

$(\alpha\beta)_{32}$的估計值為$(590-540-538.3+515)=26.7$

$(\alpha\beta)_{33}$的估計值為$(445-445-538+515)=-23$

(4)x_{ijk} 的 估 計 式 為 $x_{ijk}=\overline{X}...+(\overline{X}_{i}..-\overline{X}...)+(\overline{X}_{.j}.-\overline{X}...)+(\overline{X}_{ij}.-\overline{X}_{i}..-\overline{X}_{.j}.+\overline{X}...)$
$+(x_{ijk}-\overline{X}_{ij}.)$所以$x_{ijk}$的估計式可表示成

$$x_{ijk}=515+(\overline{X}_{i}..-515)+(\overline{X}_{.j}.-515)+(\overline{X}_{ij}.-\overline{X}_{i}..-\overline{X}_{.j}.+515)+(x_{ijk}-\overline{X}_{ij}.)$$

(5)$x_{231}=515+(\overline{X}_{2}..-515)+(\overline{X}_{.3}.-515)+(\overline{X}_{23}.-\overline{X}_{2}..-\overline{X}_{.3}.+515)+(x_{231}-\overline{X}_{23}.)$

所以

$$\begin{aligned}420&=515+(513.3-515)+(445-515)+(450-513.3-445+515)+(420-450)\\&=515+(-1.7)+(-70)+(6.7)+(-30)\end{aligned}$$

(6)$\text{SST}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{2}(x_{ijk}-\overline{X}...)^2=82450$

$\text{SSA}=6\sum_{i=1}^{3}(X_{i}..-\overline{X}...)^2=6100$

$\text{SSB}=6\sum_{j=1}^{3}(\overline{X}_{.j}.-\overline{X}...)^2=45300$

$\text{SSAB}=2\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(\overline{X}_{ij}.-\overline{X}_{i}..-\overline{X}_{.j}.+\overline{X}...)^2=11200$

$\text{SSE}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{2}(x_{ijk}-\overline{X}_{ij}.)^2=19850$

所以本題的 ANOVA 表如表 E-13-9-3 所示。

表 E-13-9-3

來源	平方和	自由度	均方和	F 值
A 因子	6100	2	3050	1.38
B 因子	45300	2	26650	10.27
交互作用	11200	4	2800	1.27
誤差	19850	9	2205.6	
總計	82450	17		

(7) ε_{ijk} 的變異數 σ^2 的估計值為 MSE＝2205.6。

13.10 以雙因子設計探討電腦主機板上兩種晶片對主機板效率的影響，其中晶片一有 3 種廠牌，晶片二也有 3 種廠牌，每種組合中安排 3 個重複數，檢測的效率值愈大表示主機板的效率愈佳。實驗資料如表 E-13-10-1 所示。

表 E-13-10-1

		晶片二		
		1	2	3
晶片一	1	23	44	28
		24	45	29
		25	46	30
	2	25	42	27
		26	46	28
		27	50	29
	3	24	41	26
		26	45	28
		28	49	30

(1)估計主機板效率的共同效應值。

(2)估計晶片一在主機板效率上的效應值。

(3)估計晶片二在主機板效率上的效應值。

(4)估計兩種晶片交互組合在主機板上的效應值。

(5)在 $\alpha=0.05$ 下，檢定晶片一、晶片二及兩種零件混合使用的交互作用是否顯著。

解：

本題的試算表如表 E-13-10-2 所示。

表 E-13-10-2

		晶片二			樣本數	總和	平均數
		1	2	3			
晶片一	1	23 24 25	44 45 46	28 29 30			
		24	45	29	9	294	32.66667
	2	25 26 27	42 46 50	27 28 29			
		26	46	28	9	300	33.33333
	3	24 26 28	41 45 49	26 28 30			
		26	45	28	9	297	33
樣本數		9	9	9	27		
總和		228	408	255		891	
平均數		25.33333	45.33333	28.33333			33

(1) $\overline{X}\ldots$ 為主機板效率共同效應的估計量，由試算表 E-13-10-2 得知其值為 33

(2)晶片一 3 種廠牌在主機板效率上的效應估計量為 $(\overline{X}_i.. - \overline{X}\ldots)$，由表 E-13-10-2 得知

晶片一第 1 種廠牌對主機板效率的效應值為 $(32.67-33)=-0.33$

晶片一第 2 種廠牌對主機板效率的效應值為 $(33.33-33)=0.33$

晶片一第 3 種廠牌對主機板效率的效應值為 $(33-33)=0$

⑶晶片二 3 種廠牌在主機板效率上的效應估計量為 $(\overline{X}_{.j.}-\overline{X}_{...})$，由表 E-13-10-2 得知

晶片二第 1 種廠牌對主機板的效應值為 $(25.33-33)=-7.67$

晶片二第 2 種廠牌對主機板的效應值為 $(45.33-33)=12.33$

晶片二第 3 種廠牌對主機板的效應值為 $(28.33-33)=-4.67$

⑷兩種晶片交互作用在主機板上效率的效應估計值為 $(\overline{X}_{ij.}-\overline{X}_{i..}-\overline{X}_{.j.}+\overline{X}_{...})$，由表 E-13-10-2 得知

晶片一第 1 廠牌及晶片二第 1 廠牌交互效應估計值為

$(24-25.33-32.67+33)=-1$

晶片一第 1 廠牌及晶片二第 2 廠牌交互效應估計值為

$(45-45.33-32.67+33)=0$

晶片一第 1 廠牌及晶片二第 3 廠牌交互效應估計值為

$(29-28.33-32.67+33)=1$

晶片一第 2 廠牌及晶片二第 1 廠牌交互效應估計值為

$(26-25.33-33.33+33)=0.34$

晶片一第 2 廠牌及晶片二第 2 廠牌交互效應估計值為

$(46-45.33-33.33+33)=0.34$

晶片一第 2 廠牌及晶片二第 3 廠牌交互效應估計值為

$(28-28.33-33.33+33)=-0.66$

晶片一第 3 廠牌及晶片二第 1 廠牌交互效應估計值為

$(26-25.33-33+33)=0.67$

晶片一第 3 廠牌及晶片二第 2 廠牌交互效應估計值為

$(45-45.33-33+33)=-0.33$

晶片一第 3 廠牌及晶片二第 3 廠牌交互效應估計值為

$(28-28.33+33-33)=-0.33$

⑸ $SST=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{2}(x_{ijk}-\overline{X}_{...})^2=2196$

$SSA=9\sum_{i=1}^{3}(\overline{X}_{i..}-\overline{X}_{...})^2=2$

$$SSB = 9\sum_{j=1}^{3}(\overline{X}_{\cdot j\cdot} - \overline{X}_{\cdots})^2 = 2094$$

$$SSAB = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}(\overline{X}_{ij\cdot} - \overline{X}_{i\cdot\cdot} - \overline{X}_{\cdot j\cdot} + \overline{X}_{\cdots})^2 = 10$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}(x_{ijk} - \overline{X}_{ij\cdot})^2 = 90$$

所以本題的 ANOVA 表如表 E-13-10-3 所示。

表 E-13-10-3

來源	平方和	自由度	均方和	F 值
晶片一	2	2	1	0.2
晶片二	2094	2	1047	209.4
交互作用	10	4	2.5	0.5
誤差	90	18	5	
總計	2196	26		

以 α_i、β_j、$(\alpha\beta)_{ij}$分別表示晶片一、晶片二及交互效應。

H_0：$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

H_1：H_0不成立

$\alpha = 0.05$，$F_{0.05}(2, 18) = 3.55$，所以這個檢定的拒絕域 R 為

$$R = \left\{\frac{MSA}{MSE} \,\middle|\, \frac{MSA}{MSE} > 3.55\right\}$$

由表 E-13-10-3 得知，檢定值$\frac{MSA}{MSE} = 0.2 < 3.55$。所以檢定結果為不拒絕$H_0$，這表示晶片一 3 種廠牌對主機板效率的影響無顯著差異。

H_0：$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$

H_1：H_0不成立

$\alpha = 0.05$，$F_{0.05}(2, 18) = 3.55$，所以這個檢定的拒絕域 R 為

$$R = \left\{ \frac{\text{MSB}}{\text{MSE}} \,\middle|\, \frac{\text{MSB}}{\text{MSE}} > 3.55 \right\}$$

由表 E-13-10-3 得知，檢定值 $\frac{\text{MSB}}{\text{MSE}} = 209.4 > 3.55$。所以檢定結果為拒絕 H_0，這表示晶片二 3 種廠牌對主機板效率的影響有顯著差異。

H_0：$(\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \qquad j = 1, 2, 3$

H_1：H_0 不成立

$\alpha = 0.05$，$F_{0.05}(4, 18) = 2.93$，所以這個檢定的拒絕域 R 為

$$R = \left\{ \frac{\text{MSAB}}{\text{MSE}} \,\middle|\, \frac{\text{MSAB}}{\text{MSE}} > 2.93 \right\}$$

由表 E-13-10-3 得知，檢定值 $\frac{\text{MSAB}}{\text{MSE}} = 0.5 < 2.93$。所以檢定結果為不拒絕 H_0，這表示晶片一及晶片二混合裝配在主機板上對主機板效率所產生的交互作用並不顯著。