第 12 章

統計假設檢定㈡

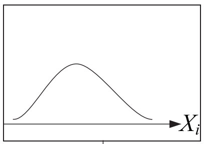
	$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ σ_1^2及σ_2^2皆為已知		
擬定H_0及H_1	$H_0：\mu_1-\mu_2=d_1$ $H_1：\mu_1-\mu_2\neq d_1$ （雙尾檢定）	$H_0：\mu_1-\mu_2\leq d_2$ $H_1：\mu_1-\mu_2>d_2$ （右尾檢定）	$H_0：\mu_1-\mu_2\geq d_3$ $H_1：\mu_1-\mu_2<d_3$ （左尾檢定）
抽樣	$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n_1}$ $x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n_2}$		
檢定統計量	$\overline{X}_1-\overline{X}_2=\frac{\Sigma x_{1i}}{n_1}-\frac{\Sigma x_{2j}}{n_2}$		
H_0為真時，檢定統計量的抽樣分配	$\overline{X}_1-\overline{X}_2\sim N\left(d_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$	$\overline{X}_1-\overline{X}_2\sim N\left(d_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$	$\overline{X}_1-\overline{X}_2\sim N\left(d_3, \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$
標準化	$\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-d_1}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$	$\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-d_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$	$\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-d_3}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$
顯著水準α時之拒絕域	$\left\lvert\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-d_1}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right\rvert>Z_{\frac{\alpha}{2}}$	$\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-d_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}>Z_{\alpha}$	$\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-d_3}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}<-Z_{\alpha}$

圖 12-1-1　兩個常態母群體變異數已知時平均數差$\mu_1-\mu_2$的檢定程序

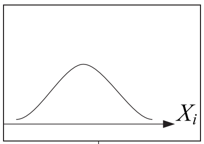
	$X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ $X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ σ_1^2及σ_2^2未知但相等		
擬定H_0及H_1	$H_0: \mu_1-\mu_2=d_1$ $H_1: \mu_1-\mu_2\neq d_1$ （雙尾檢定）	$H_0: \mu_1-\mu_2\leq d_2$ $H_1: \mu_1-\mu_2>d_2$ （右尾檢定）	$H_0: \mu_1-\mu_2\geq d_3$ $H_1: \mu_1-\mu_2<d_3$ （左尾檢定）
抽樣	$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n_1}$ $x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n_2}$		
檢定統計量	$\bar{X}_1-\bar{X}_2=\frac{\Sigma x_{1i}}{n_1}-\frac{\Sigma x_{2j}}{n_2}$		
H_0為真時，檢定統計量的抽樣分配	$\bar{X}_1-\bar{X}_2 \sim N\left(d_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$	$\bar{X}_1-\bar{X}_2 \sim N\left(d_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$	$\bar{X}_1-\bar{X}_2 \sim N\left(d_3, \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$
標準化	$\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-d_1}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$	$\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-d_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$	$\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-d_3}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$
顯著水準α時之拒絕域	$\left\lvert\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-d_1}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\right\rvert > t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$	$\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-d_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} > t_{\alpha}(n_1+n_2-2)$	$\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-d_3}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} < -t_{\alpha}(n_1+n_2-2)$

圖 12-2-1　兩個常態母群體變異數未知但相等時平均數差 $\mu_1-\mu_2$ 的檢定程序

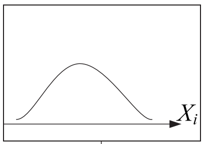
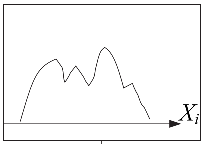
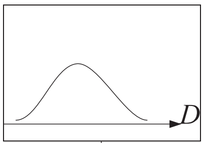
	$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ σ_1^2及σ_2^2未知且不相等		
擬定H_0及H_1	H_0：$\mu_1 - \mu_2 = d_1$ H_1：$\mu_1 - \mu_2 \neq d_1$ （雙尾檢定）	H_0：$\mu_1 - \mu_2 \leq d_2$ H_1：$\mu_1 - \mu_2 > d_2$ （右尾檢定）	H_0：$\mu_1 - \mu_2 \geq d_3$ H_1：$\mu_1 - \mu_2 < d_3$ （左尾檢定）
抽樣	$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n_1}$ $x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n_2}$		
檢定統計量	$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 = \frac{\Sigma x_{1i}}{n_1} - \frac{\Sigma x_{2j}}{n_2}$		
H_0為真時，檢定統計量的抽樣分配	$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim N\left(d_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$	$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim N\left(d_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$	$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim N\left(d_3, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$
標準化	$\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - d_1}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t(v)$	$\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - d_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t(v)$	$\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - d_3}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t(v)$
顯著水準α時之拒絕域	$\left\lvert\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - d_1}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}\right\rvert > t_{\alpha/2}(v)$	$\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - d_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} > t_\alpha(v)$	$\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - d_3}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} < -t_\alpha(v)$

圖 12-3-1　兩個常態母群體變異數未知且不相等時平均數差$\mu_1 - \mu_2$的檢定程序



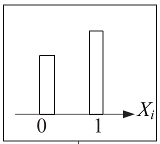
	$X_1 \sim (\mu_1, \sigma_1^2)$ $X_2 \sim (\mu_2, \sigma_2^2)$		
擬定H_0及H_1	$H_0：\mu_1-\mu_2=d_1$ $H_1：\mu_1-\mu_2\neq d_1$ （雙尾檢定）	$H_0：\mu_1-\mu_2\leq d_2$ $H_1：\mu_1-\mu_2>d_2$ （右尾檢定）	$H_0：\mu_1-\mu_2\geq d_3$ $H_1：\mu_1-\mu_2<d_3$ （左尾檢定）
抽樣	$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n_1}$ $x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n_2}$ 大樣本$n_1\geq 30$, $n_2\geq 30$		
檢定統計量	$\bar{X}_1-\bar{X}_2=\dfrac{\Sigma x_{1i}}{n_1}-\dfrac{\Sigma x_{2j}}{n_2}$		
H_0為真時，檢定統計量的抽樣分配	$\bar{X}_1-\bar{X}_2 \doteqdot N\left(d_1, \dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$	$\bar{X}_1-\bar{X}_2 \doteqdot N\left(d_2, \dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$	$\bar{X}_1-\bar{X}_2 \doteqdot N\left(d_3, \dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$
標準化	$\dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-d_1}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}} \doteqdot N(0,1)$	$\dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-d_2}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}} \doteqdot N(0,1)$	$\dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-d_3}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}} \doteqdot N(0,1)$
顯著水準α時之拒絕域	$\left\lvert\dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-d_1}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}}\right\rvert > Z_{\alpha/2}$	$\dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-d_2}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}} > Z_{\alpha}$	$\dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-d_3}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}} < -Z_{\alpha}$

圖 12-4-1　兩個非常態母群體平均數差$\mu_1-\mu_2$的檢定程序



	$D \sim N(\mu_D, \sigma_D^2)$		
擬定H_0及H_1	$H_0: \mu_D = k_1$ $H_1: \mu_D \neq k_1$ （雙尾檢定）	$H_0: \mu_D \leq k_2$ $H_1: \mu_D > k_2$ （右尾檢定）	$H_0: \mu_D \geq k_3$ $H_1: \mu_D < k_3$ （左尾檢定）
抽樣	$(x_1, y_1) \quad d_1 = x_1 - y_1$ $(x_2, y_2) \Rightarrow d_2 = x_2 - y_2$ $\vdots \qquad \vdots$ $(x_n, y_n) \quad d_n = x_n - y_n$		
檢定統計量	$\bar{d} = \dfrac{\Sigma d_i}{n}$		
H_0為真時，檢定統計量的抽樣分配	$\bar{d} \sim N\left(k_1, \dfrac{\sigma_D^2}{n}\right)$	$\bar{d} \sim N\left(k_2, \dfrac{\sigma_D^2}{n}\right)$	$\bar{d} \sim N\left(k_3, \dfrac{\sigma_D^2}{n}\right)$
標準化	$\dfrac{\bar{d} - k_1}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$	$\dfrac{\bar{d} - k_2}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$	$\dfrac{\bar{d} - k_3}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$
顯著水準α時之拒絕域	$\left\lvert \dfrac{\bar{d} - k_1}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \right\rvert > t_{\alpha/2}(n-1)$	$\dfrac{\bar{d} - k_2}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} > t_{\alpha}(n-1)$	$\dfrac{\bar{d} - k_3}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} < -t_{\alpha}(n-1)$

圖 12-5-1　兩個相依母群體平均數差μ_D的檢定程序



$X_1 \sim \text{Bernoulli}(p_1)$
$X_2 \sim \text{Bernoulli}(p_2)$

擬定H_0及H_1	$H_0: p_1 - p_2 = d_1$ $H_1: p_1 - p_2 \neq d_1$ （雙尾檢定）	$H_0: p_1 - p_2 \le d_2$ $H_1: p_1 - p_2 > d_2$ （右尾檢定）	$H_0: p_1 - p_2 \ge d_3$ $H_1: p_1 - p_2 < d_3$ （左尾檢定）
抽樣	$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n_1}$ $x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n_2}$ 大樣本（$n_1 \ge 30$, $n_2 \ge 30$）		
檢定統計量	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = \frac{\Sigma x_{1i}}{n_1} - \frac{\Sigma x_{2i}}{n_2}$		
H_0為真時，檢定統計量的抽樣分配	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \doteqdot N\left(d_1, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \doteqdot N\left(d_2, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \doteqdot N\left(d_3, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$
標準化	$\frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - d_1}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}} \doteqdot N(0,1)$	$\frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - d_2}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}} \doteqdot N(0,1)$	$\frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - d_3}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}} \doteqdot N(0,1)$
顯著水準α時之拒絕域	$\left\lvert \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - d_1}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}} \right\rvert > Z_{\alpha/2}$	$\frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - d_2}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}} > z_\alpha$	$\frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - d_3}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}} < -z_\alpha$

圖 12-6-1　兩個母群體比例差的檢定程序

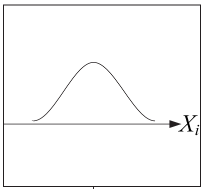
	$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$		
擬定H_0及H_1	$H_0:\ \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = d_1$ $H_1:\ \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq d_1$ （雙尾檢定）	$H_0:\ \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le d_2$ $H_1:\ \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > d_2$ （右尾檢定）	$H_0:\ \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \ge d_3$ $H_1:\ \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < d_3$ （左尾檢定）
抽樣	$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n_1}$ $x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n_2}$		
檢定統計量	$\frac{S_1^2}{S_2^2}$		
H_0為真時，檢定統計量的抽樣分配	$\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{d_1} \sim F(n_1-1, n_2-1)$	$\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{d_2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$	$\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{d_3} \sim F(n_1-1, n_2-1)$
顯著水準α時之拒絕域	$\frac{S_1^2}{S_2^2} < d_1 F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)$ 或 $\frac{S_1^2}{S_2^2} > d_1 F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$	$\frac{S_1^2}{S_2^2} > d_2 F_{\alpha}(n_1-1, n_2-1)$	$\frac{S_1^2}{S_2^2} < d_3 F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)$

圖 12-7-1　兩個常態母群體變異數比值$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的檢定程序

12.1 X_1 及 X_2 分別表示國產車及進口車的年維修保養成本，隨機抽取 10 部國產車及 10 部進口車並記錄其年維修保養費用如下：

X_1	6800	5900	6300	7800	8900	7500	6100	10500	5400	6900
X_2	8900	9800	12350	10670	9500	8700	13400	9700	8600	8800

假設 X_1 及 X_2 皆為常態分配且已知其變異數分別為 7000 及 10000，在 $\alpha=0.025$ 下檢定國產車的維修保養成本低於進口車的維修保養成本。

解：

令 μ_1 、 μ_2 分別表示國產車及進口車的平均維修保養成本，則這個檢定的 H_0 及 H_1 為

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq 0$$
$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0$$

$\alpha=0.025$ ，$Z_{0.025}=1.96$。以樣本平均數差 $\overline{X}_1-\overline{X}_2$ 為檢定統計量，則顯著水準 $\alpha=0.025$ 下之拒絕域 R 為

$$R=\left\{\overline{X}_1-\overline{X}_2 \left| \frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-0}{\sqrt{\frac{7000}{10}+\frac{10000}{10}}} < -1.96 \right.\right\}$$

根據本題樣本資料計算檢定統計值為

$$\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-0}{\sqrt{\frac{7000}{10}+\frac{10000}{10}}}=\frac{7210-10042}{\sqrt{700+1000}}=-68.69$$

所以檢定結果為拒絕 H_0 ，這表示國產車的平均維修保養成本顯著低於進口車。

12.2 在例題 12-1-1 中，若兩變異數未知但假設相等，則檢定結果如何？

解：

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0$$
$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$$

$\overline{X}_1=156$，$\overline{X}_2=152$，$S_1^2=31.818$，$S_2^2=32$。兩母群體共同的變異數 S_p^2 為

$$S_p^2=\frac{11(31.818)+11(32)}{(12+12-2)}=31.91$$

$\alpha=0.05$，$t_{0.05}(22)=1.717$。以樣本平均數差 $\overline{X}_1-\overline{X}_2$ 為檢定統計量，則顯著水準 $\alpha=0.05$ 下之拒絕域 R 為

$$R=\left\{\overline{X}_1-\overline{X}_2\left|\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-0}{\sqrt{31.91(\frac{1}{12}+\frac{1}{12})}}>1.717\right.\right\}$$

根據本題樣本資料計算檢定統計值為

$$\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-0}{\sqrt{31.91(\frac{1}{12}+\frac{1}{12})}}=\frac{(156-152)}{\sqrt{31.91(\frac{1}{6})}}=1.735>1.717$$

所以檢定結果仍為拒絕 H_0。

（註）從數據看你可能覺得男女生的身高差異不是很大，但為何檢定結果都是顯著呢？原因是變異數較小時使得檢定的敏感性較大。

12.3 X_1 及 X_2 分別表示兩條生產線所生產的產品品質評比，隨機自兩條生產線各抽取數個產品，量測其品質評比值為（數字愈大表示品質愈佳）

X_1	4.13	4.12	4.11	4.1	4.09
X_2	4.06	4.07	4.05	4.04	

在 $\alpha=0.05$ 下檢定第一條生產線的平均品質高於第二條生產線平均品質超過 0.03 評比值。假設 X_1 及 X_2 為常態分配且其變異數未知但相等。

解：

令 μ_1、μ_2 分別表示兩條生產線的平均品質，則這個檢定的 H_0 及 H_1 為

$$H_0：\mu_1-\mu_2\le 0.03$$
$$H_1：\mu_1-\mu_2>0.03$$

$\overline{X}_1=4.11$，$\overline{X}_2=4.055$，$S_1^2=0.00025$，$S_2^2=0.000167$。兩個母群體共同的變異數估計值為

$$S_p^2=\frac{(5-1)(0.00025)+(4-1)(0.000167)}{(5+4-2)}$$
$$=0.000214$$

$\alpha=0.05$，$t_{0.05}(5+4-2)=1.895$，以樣本平均數差$\overline{X}_1-\overline{X}_2$為檢定統計量，則顯著水準$\alpha=0.05$下之拒絕域$R$為

$$R=\left\{\overline{X}_1-\overline{X}_2\left|\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-0.03}{\sqrt{0.000214(\frac{1}{5}+\frac{1}{4})}}>1.895\right.\right\}$$

根據本題樣本資料計算檢定統計值為

$$\frac{(4.11)-(4.055)-0.03}{\sqrt{0.000214(\frac{1}{5}+\frac{1}{4})}}=2.55>1.895$$

所以檢定結果為拒絕H_0，這表示第一條生產線的平均品質顯著超過第二條生產線平均品質達 0.03 評比值。

12.4　X_1 及 X_2 皆為常態分配，自 X_1 及 X_2 各隨機抽取 5 個樣本如下：

X_1	6	7	9	4	11
X_2	10	12	9	7	8

在$\alpha=0.05$下檢定兩分配的期望值是否相等。

解：

以μ_1、μ_2表示X_1、X_2的期望值，則這個檢定的H_0及H_1為

$$H_0:\mu_1-\mu_2=0$$
$$H_1:\mu_1-\mu_2\neq 0$$

$\overline{X}_1=7.4$，$\overline{X}_2=9.2$，$S_1^2=7.3$，$S_2^2=3.7$。以$\overline{X}_1-\overline{X}_2$ 為檢定統計量，則

$$\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-0}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}}\sim t(v)$$

其中

$$v=\frac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\dfrac{\left(\dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{7.3}{5}+\dfrac{3.7}{5}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{7.3}{5}\right)^2}{4}+\dfrac{\left(\dfrac{3.7}{5}\right)^2}{4}}=7.23$$

所以取其最接近的整數 $v=7$，$\alpha=0.05$，$t_{0.025}(7)=2.365$，則顯著水準$\alpha=0.05$下之拒絕域 R 為

$$R=\left\{\overline{X}_1-\overline{X}_2\ \middle|\ \left|\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-0}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}}\right|>2.365\right\}$$

根據本題樣本資料計算檢定統計值為

$$\left|\frac{(7.4-9.2)-0}{\sqrt{\dfrac{7.3}{5}+\dfrac{3.7}{5}}}\right|=1.214<2.365$$

所以檢定結果為拒絕 H_0，這表示兩個平均數並無顯著差異。

12.5 欲比較兩種電池的使用壽命，分別隨機抽取兩種電池進行壽命試驗，測得其壽命資料（單位：小時）如下：

X_1	66	65	63	69	
X_2	45	49	51	56	47

假設兩種電池的壽命分配皆為常態分配，在 $\alpha=0.05$ 下檢定兩種電池使用壽命的平均值是否相差 10 小時以上。

解：

以 μ_1 、 μ_2 表示 X_1 及 X_2 的平均數，則這個檢定的 H_0 及 H_1 為

$$H_0 : \mu_1-\mu_2 \leq 10$$
$$H_1 : \mu_1-\mu_2 > 10$$

$\overline{X}_1=65.75$，$\overline{X}_2=49.6$，$S_1^2=6.25$，$S_2^2=17.8$。以 $\overline{X}_1-\overline{X}_2$ 為檢定統計量，則

$$\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-10}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}} \sim t(v)$$

其中

$$v=\frac{\left(\dfrac{6.25}{4}+\dfrac{17.8}{5}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{6.25}{4}\right)^2}{3}+\dfrac{\left(\dfrac{17.8}{5}\right)^2}{4}}=6.589$$

所以取其最接近的整數 $v=7$ ，$\alpha=0.05$，$t_{0.05}(7)=1.8946$，則這個檢定的拒絕域 R 為

$$R=\left\{\overline{X}_1-\overline{X}_2 \left| \frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-10}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}} > 1.8946 \right.\right\}$$

根據本題樣本資料計算檢定統計值為

$$\frac{(65.75-49.6)-10}{\sqrt{\frac{6.25}{4}+\frac{17.8}{5}}}=2.72>1.8946$$

所以檢定結果為拒絕 H_0，這表示第一種電池的平均壽命顯著比第二種電池多 10 小時以上。

12.6 X_1 及 X_2 為非常態分配，自 X_1 及 X_2 分別隨機抽取 36 個及 64 個樣本，$\overline{X}_1=52$，$\overline{X}_2=43$，$S_1^2=16$，$S_2^2=25$。在 $\alpha=0.05$ 下檢定兩母群體平均數差是否超過 5。

解：

以 μ_1、μ_2 表示 X_1、X_2 的平均數，則這個檢定的 H_0 及 H_1 為

$$H_0 ：\mu_1-\mu_2\le 5$$
$$H_1 ：\mu_1-\mu_2>5$$

$\alpha=0.05$，$Z_{0.05}=1.645$。以 $\overline{X}_1-\overline{X}_2$ 為檢定統計量，則檢定的拒絕域 R 為

$$R=\left\{\overline{X}_1-\overline{X}_2\left|\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-5}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}>1.645\right.\right\}$$

根據本題樣本資料計算檢定值為

$$\frac{(52-43)-5}{\sqrt{\frac{16}{36}+\frac{25}{64}}}=4.38>1.645$$

所以檢定結果為拒絕 H_0，這表示第一母群體的平均數顯著超過第二母群體平均數 5 以上。

12.7 百事達錄影帶出租店欲比較兩類影片的租片狀況，以 X_1 及 X_2 表示這兩類影片的租片次數，自這兩類影片中隨機抽取 50 片及 60 片，分別計算樣本平均出租次數 $\overline{X}_1=432$，$\overline{X}_2=320$ 及樣本變異數為 $S_1^2=80$，$S_2^2=120$。在 $\alpha=0.05$ 下檢定第一類影片的平均出租次數是否顯著超過第二類影片的平均出租次數達 100 次以上。

解：

以μ_1、μ_2分別表示X_1、X_2的平均數，則這個檢定的H_0及H_1為

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \le 100$$
$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 100$$

$\alpha = 0.05$，$Z_\alpha = 1.645$。以樣本平均數$\overline{X}_1 - \overline{X}_2$為檢定統計量，則顯著水準$\alpha = 0.05$下的拒絕域$R$為

$$R = \left\{ \overline{X}_1 - \overline{X}_2 \,\middle|\, \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - 100}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}} > 1.645 \right\}$$

根據本題樣本資料計算檢定值為

$$\frac{(432 - 320) - 100}{\sqrt{\dfrac{80}{50} + \dfrac{120}{60}}} = 6.32 > 1.645$$

所以檢定結果為拒絕H_0，這表示第一類影片的平均出租次數顯著超過第二類影片的平均出租次數達 100 次以上。

12.8 欲比較兩都市 8 月份的平均溫度，記錄 8 月份中某日兩地自零時至 24 時每隔兩小時的溫度記錄如下：

	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
X_1	24.2	25.5	26	26.2	26.8	29.2	32	34	34	33.2	31	28
X_2	26	26.8	27	27.4	28	30	34	37	38	37.6	34	30

其中X_1表示城市 1 的溫度，X_2表示城市 2 的溫度，在$\alpha = 0.05$下檢定兩城市的平均溫度是否相等。假設X_1、X_2為常態分配

(1)用本章第三節的檢定程序。

(2)用本章第五節的檢定程序。

(3)你認為(1)、(2)那一個較適當。

解：

以μ_1、μ_2表示X_1及X_2的平均數，則

(1)

$$H_0：\mu_1-\mu_2=0$$
$$H_1：\mu_1-\mu_2\neq 0$$

$\overline{X}_1=29.19$，$\overline{X}_2=31.32$，$S_1^2=12.75$，$S_2^2=20.72$。以$\overline{X}_1-\overline{X}_2$為檢定統計量，則

$$\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-0}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}}\sim t(v)$$

其中

$$v=\frac{\left(\dfrac{12.75}{12}+\dfrac{20.72}{12}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{12.75}{12}\right)^2}{11}+\dfrac{\left(\dfrac{20.72}{12}\right)^2}{11}}=20.8194$$

所以取其最接近的整數$v=21$，$\alpha=0.05$，$t_{0.025}(21)=2.08$。則檢定的拒絕域為

$$R=\left\{\overline{X}_1-\overline{X}_2\;\middle|\;\left|\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-0}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}}\right|>2.08\right\}$$

根據本題樣本資料計算檢定值為

$$\left|\frac{(29.19-31.32)-0}{\sqrt{\dfrac{12.75}{12}+\dfrac{20.72}{12}}}\right|=1.27<2.08$$

所以檢定結果為不拒絕H_0。

(2)以μ_D表示兩城市同一時間溫度的平均數（$\mu_D=\mu_1-\mu_2$）。

$$H_0 ：\mu_D = 0$$
$$H_1 ：\mu_D \neq 0$$

$\alpha = 0.05$，$t_{0.025}(11) = 2.2$。所以檢定的拒絕域 R 為

$$R = \left\{ \bar{d} \;\middle|\; \left| \frac{\bar{d} - 0}{\frac{S_D}{\sqrt{12}}} \right| > 2.2 \right\}$$

表 E-12-8-1

X_1	X_2	d
24.2	26	−1.8
25.5	26.8	−1.3
26	27	−1
26.2	27.4	−1.2
26.8	28	−1.2
29.2	30	−0.8
32	34	−2
34	37	−3
34	38	−4
33.2	37.6	−4.4
31	34	−3
28	30	−2

根據本題資料表 E-12-8-1，計算檢定統計值

$$\bar{d} = -2.14167$$
$$S_D^2 = 1.433561$$
$$S_D = 1.197314$$
$$\left| \frac{\bar{d} - 0}{\frac{S_D}{\sqrt{12}}} \right| = \left| \frac{-2.14167}{\frac{1.197}{\sqrt{12}}} \right| = 6.196 > 2.2$$

所以檢定結果為拒絕 H_0 ，表示兩城市平均溫度顯著不相等。

⑶本題資料是在同一時間點分別記錄兩城市的溫度，所以是配對樣本。因此⑵是比較適當的檢定方法。從⑴、⑵檢定有完全不同的結果，顯示選擇正確方法的重要性。

12.9 隨機抽取 6 位減重課程學員參加該課程前後的體重資料如下：

	1	2	3	4	5	6
X_1	84	95	103	75	88	79
X_2	81	92	104	77	86	81

其中 X_1 表示參加之前的體重，X_2 表示參加該課程之後的體重。在 $\alpha=0.05$ 下檢定該課程的減重效果是否顯著，假設參加該課程前後體重差為常態分配。

解：

以 μ_D 表示參加課程前後體重差的平均數（$\mu_D=\mu_1-\mu_2$），則這個檢定的 H_0 及 H_1 為

$$H_0: \mu_D=0$$
$$H_1: \mu_D\neq 0$$

$\alpha=0.05$，$t_{0.025}(5)=2.57$。所以檢定的拒絕域 R 為

$$R=\left\{\bar{d}\;\middle|\;\left|\frac{\bar{d}-0}{\frac{S_D}{\sqrt{6}}}\right|>2.57\right\}$$

表 E-12-9-1

X_1	X_2	d
84	81	3
95	92	3
103	104	−1
75	77	−2
88	86	2
79	81	−2

根據本題資料表 E-12-9-1，計算檢定值為

$$\bar{d}=0.5$$
$$S_D^2=5.9$$
$$S_D=2.429$$
$$\left|\frac{\bar{d}-0}{\frac{S_D}{\sqrt{6}}}\right|=\left|\frac{0.5-0}{\frac{2.429}{\sqrt{6}}}\right|=0.5042<2.57$$

所以檢定結果為不拒絕 H_0 ，這表示該減重課程效果並不顯著。

12.10 分別自國小男女生中隨機抽取 1200 人，依標準體重表判定其體重是否過重 。測量結果顯示有 350 位男生及 520 位女生體重過重。在 $\alpha=0.05$ 下檢定國小女生體重超重的比例比男生多 1 成。

解：

以 p_1、p_2 表示女生及男生超重的比例，則這個檢定的 H_0 及 H_1 為

$$H_0：p_1-p_2\leq 0.1$$
$$H_1：p_1-p_2>0.1$$

$\alpha=0.05$，$Z_{0.05}=1.645$，所以這個檢定的拒絕域為

$$R=\left\{\hat{p}_1-\hat{p}_2\left|\frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-0.1}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}}>1.645\right.\right\}$$

根據本題樣本資料 $\hat{p}_1=0.433$，$\hat{p}_2=0.292$

$$\frac{(0.433-0.292)-0.1}{\sqrt{\frac{(0.433)(0.567)}{1200}+\frac{(0.292)(0.718)}{1200}}}=2.14>1.645$$

所以檢定結果為拒絕 H_0 ，這表示女生過重的比例顯著超過男生達 1 成以上。

12.11 隨機調查 1300 位退役男生及 1500 位大專應屆畢業女生，其中有 520 位男生及 540 位女生等待就業，在$\alpha=0.025$下檢定退役男生的待業率高於應屆畢業女生的待業率。

解：

以p_1、p_2表示男生及女生的待業率，則這個檢定的H_0及 H_1

$$H_0：p_1-p_2=0$$
$$H_1：p_1-p_2>0$$

$\alpha=0.025$，$Z_{0.025}=1.96$，所以這個檢定的拒絕域 R 為

$$R=\left\{\hat{p}_1-\hat{p}_2\left|\frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-0}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}>1.96\right.\right\}$$

根據本題樣本資料$\hat{p}_1=\dfrac{520}{1300}=0.4$，$\hat{p}_2=\dfrac{540}{1500}=0.36$，$\hat{p}=\dfrac{1060}{2800}=0.3786$

$$\frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-0}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}=\frac{(0.4-0.36)}{\sqrt{(0.3786)(0.6214)\left(\frac{1}{1300}+\frac{1}{1500}\right)}}=2.176>1.96$$

所以檢定結果為拒絕H_0，這表示退役男生的待業率顯著高於應屆畢業女生的待業率。

12.12 X_1、X_2皆為常態分配，分別抽樣的樣本資料為

X_1	4	12	20	27	35
X_2	11	19	17	15	22

在$\alpha=0.05$下檢定X_1的變異數至少為X_2的 1.3 倍。

解：

以σ_1^2及σ_2^2分別表示X_1及 X_2的變異數，則這個檢定的H_0及H_1為

$$H_0：\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\le 1.3$$
$$H_1：\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}>1.3$$

$\alpha=0.05$，$F_{0.05}(4,4)=6.39$。所以這個檢定的拒絕域 R 為

$$R=\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2}\left|\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{1.3}>6.39\right.\right\}$$

根據本題樣本資料，$S_1^2=148.3$，$S_2^2=17.2$

$$\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{1.3}=\frac{\frac{148.3}{17.2}}{1.3}=6.63>6.39$$

所以檢定結果為拒絕 H_0 ，這表示 σ_1^2 至少為 σ_2^2 的 1.3 倍的證據非常顯著。

12.13 X_1 及 X_2 為常態分配，分別抽樣的樣本資料為

X_1	8	12	20	27	30
X_2	11	19	17	15	22

在 $\alpha=0.05$ 下檢定 X_1 的變異數是否大於 X_2 的變異數。

解：

以 σ_1^2 及 σ_2^2 分別表示 X_1 及 X_2 的變異數，則這個檢定的 H_0 及 H_1 為

$$H_0：\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=1$$
$$H_1：\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}>1$$

$\alpha=0.05$，$F_{0.05}(4,4)=6.39$，所以這個檢定的拒絕域為

$$R=\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2}\left|\frac{S_1^2}{S_2^2}>6.39\right.\right\}$$

根據本題樣本資料，$S_1^2=88.8$，$S_2^2=17.2$

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}=\frac{88.8}{17.2}=5.16<6.39$$

所以檢定結果為不拒絕 H_0，這表示 X_1 的變異數大於 X_2 的變異數並不顯著。

12.14 欲比較兩條生產線產出的品質變異，分別自兩條生產線隨機抽取樣本，量測其品質資料如下：

X_1	4.12	4.12	4.13	4.09	4.08	4	4.11
X_2	4.05	4.11	4.16	4.13	4.02		

在 $\alpha=0.05$ 下檢定兩條生產線的變異數是否相等。假設兩條生產線的品質資料皆為常態分配。

解：

以 σ_1^2 及 σ_2^2 表示 X_1 及 X_2 的變異數，則這個檢定的 H_0 及 H_1 為

$$H_0：\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=1$$
$$H_1：\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\neq 1$$

$\alpha=0.05$，$F_{0.025}(6,4)=9.2$，$F_{0.975}(6,4)=0.161$。所以這個檢定的拒絕域 R 為

$$R=\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2}\,\middle|\,\frac{S_1^2}{S_2^2}>9.2 \text{ 或 } \frac{S_1^2}{S_2^2}<0.161\right\}$$

根據本題樣本資料，$S_1^2=0.00199$，$S_2^2=0.00333$

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}=\frac{0.00199}{0.00333}=0.598$$
$$0.161<0.598<9.2$$

所以檢定結果為不拒絕 H_0，這表示兩條生產線的產出品質變異並無顯著差異。

12.15 若 p_1、p_2 分別為兩條生產線產品的不良率，為了要檢定 $H_0：p_1-p_2=0$ 及 $H_1：p_1-p_2>0$。分別自兩條生產線隨機取樣，檢測結果如下：

生產線	樣本數	樣本不良率
1	$n_1=120$	$\hat{p}_1=0.05$
2	$n_2=200$	$\hat{p}_2=0.045$

其中n_1、n_2分別為兩條生產線的抽樣數，$\hat{p}_1$及$\hat{p}_2$為兩條生產線的樣本不良率，則在顯著水準$\alpha=0.05$下，檢定法則及檢定結果為何？

解：

$$H_0：p_1-p_2=0$$
$$H_1：p_1-p_2>0$$

當H_0為真時（$p_1=p_2$），$\hat{p}_1-\hat{p}_2$的抽樣分配為近似常態分配。

$$\hat{p}_1-\hat{p}_2 \doteq N\left(p_1-p_2,\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\right)$$

其中，

$$\hat{p}=\frac{n_1\hat{p}_1+n_2\hat{p}_2}{n_1+n_2}$$

所以，檢定的拒絕域 R 為

$$R=\left\{\hat{p}_1-\hat{p}_2\left|\frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}>Z_{0.05}=1.645\right.\right\}$$

根據本題的抽樣數據

$$\hat{p}=\frac{120\times0.05+200\times0.045}{120+200}=0.0469$$

$$\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}=\frac{0.05-0.045}{\sqrt{0.0469\times0.9531\left(\frac{1}{120}+\frac{1}{200}\right)}}$$
$$=0.204807$$

所以，檢定的結論為不拒絕H_0，也就是兩條生產線的不良率並無顯著差異。