第 11 章

統計假設檢定(一)

定義 *11-1-1*：虛無假設與對應假設

將所欲檢定的母群體參數以兩個互斥的假設呈現，若稱其一為虛無假設，以符號 H_0 表示，則另一個便稱為對應假設，以符號 H_1 表示。

定義 *11-1-2*：簡單假設及複合假設

當假設所陳述的參數之可能值為單一數值時，我們稱它為簡單假設。當假設所陳述的參數之可能值為一區域值時，我們稱它為複合假設。

定義 *11-1-3*：單尾對應假設檢定及雙尾對應假設檢定

依複合對應假設的不同形式，我們將統計假設檢定分為(1)單尾對應假設檢定（one-sided alternative hypothesis testing）及(2)雙尾對應假設檢定（two-sided alternative hypothesis testing），其中單尾對應假設檢定又分為左尾對應假設檢定（left-sided alternative hypothesis testing）及右尾對應假設檢定（right-sided alternative hypothesis testing）

定義 *11-1-4*：檢定統計量（testing statistic）

欲檢定母群體的某一參數 θ 時，我們從該母群體中抽取樣本 $x_1,\cdots,x_n$。若以樣本統計量 $\hat{\theta}=f(x_1,\cdots,x_n)$ 來檢定我們為 θ 所設定的虛無及對應假設，則我們稱此 $\hat{\theta}$ 為 θ 的檢定統計量。

1h1511.tpf-2 5/14/2002 13:57:16

- 統計假設檢定
  - 簡單假設檢定
  - 複合假設檢定
    - 雙尾對應假設檢定
    - 單尾對應假設檢定
      - 左尾對應假設檢定
      - 右尾對應假設檢定

設定 H_0 ， H_1

↓

抽樣

↓

檢定統計量

↓

H_0 為真時，檢定統計量的抽樣分配

↓

拒絕 H_0 的決策法則

圖 11-1-1　假設檢定程序圖

定義 *11-1-5*：檢定值（testing statistic value）

將抽樣所得的一組樣本值代入檢定量所求得的數值，稱為檢定值。

定義 ***11-1-6***：拒絕域與接受域（rejection region and acceptance region）

假設檢定中的拒絕域指的是拒絕虛無假設（H_o）之檢定值所在的區域。接受域則是不拒絕虛無假設（或接受虛無假設為真）之檢定值所在的區域。

拒絕域位置的一般通則：

(1)左尾對應假設檢定問題的拒絕域在其檢定統計量分佈區域的左側。
(2)右尾對應假設檢定問題的拒絕域在其檢定統計量分佈區域的右側。
(3)雙尾對應假設檢定問題的拒絕域在其檢定統計量分佈區域的兩側。

表 11-1-1　假設檢定的四種可能組合

檢定的結果	母群體參數的實際情況	
	H_0 為真	H_0 為不真
拒絕 H_0	型一失誤	正確決定
不拒絕 H_0	正確決定	型二失誤

定義 ***11-1-7***：型一失誤及型二失誤（Type I error，Type II error）

當虛無假設 (H_0) 為真，而檢定的結果卻為拒絕H_0時，我們稱這種錯誤的決定為型一失誤。當虛無假設 (H_0) 為不真，而檢定的結果卻為不拒絕H_0時，我們稱這種錯誤的決定為型二失誤。

定義 ***11-1-8***：顯著水準（level of significance）

在統計假設檢定中，當虛無假設（H_0）為真時檢定值落在拒絕域的機率，稱為顯著水準，通常以符號α表示。

1h1511.tpf-4 5/14/2002 13:57:16

定義 *11-1-9*：*p* 值（significance probability）

在H_0為真的前提下，檢定統計值與H_0為真愈背道而馳的機率衡量值稱為p值，p值愈小表示拒絕H_0的理由愈充分。

***p* 值的計算法則**

(1)左尾檢定問題：

p值為檢定統計量小於等於檢定值的機率值

(2)右尾檢定問題：

p值為檢定統計量大於等於檢定值的機率值

(3)雙尾檢定問題：

p值為檢定統計量大於等於（或小於等於）檢定值之機率值乘以2。

1h1511.tpf-5 5/14/2002 13:57:16

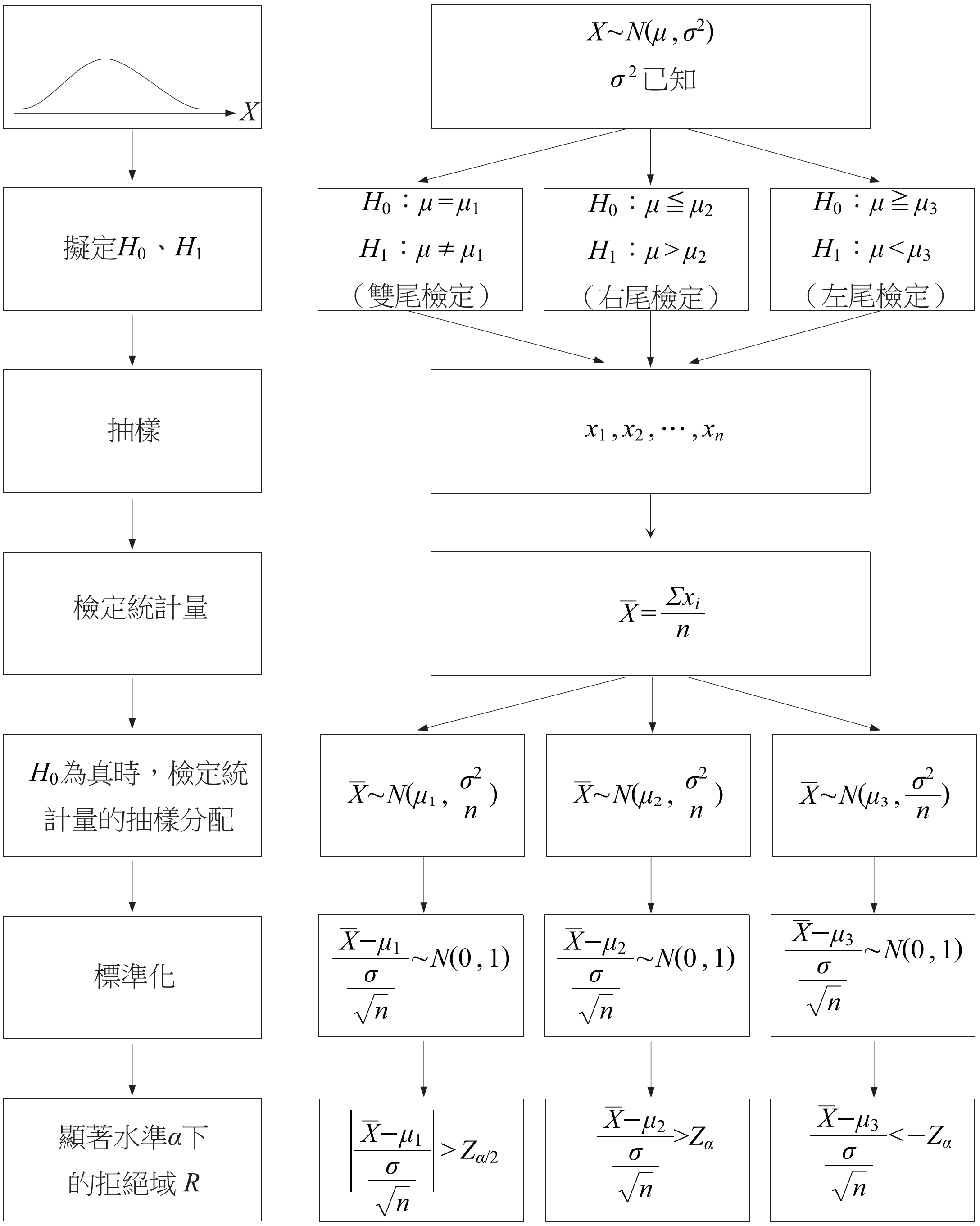


圖 11-2-1　常態母群體σ^2已知下μ的檢定程序

1h1511.tpf-6 5/14/2002 13:57:16

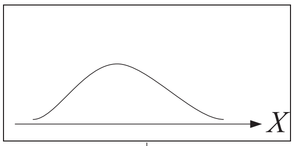
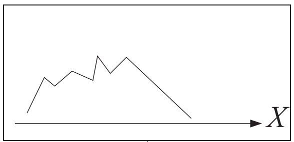
	$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ σ^2未知		
擬定H_0、H_1	H_0：$\mu=\mu_1$ H_1：$\mu\neq\mu_1$ （雙尾檢定）	H_0：$\mu\leqq\mu_2$ H_1：$\mu>\mu_2$ （右尾檢定）	H_0：$\mu\geqq\mu_3$ H_1：$\mu<\mu_3$ （左尾檢定）
抽樣	$x_1,x_2,\cdots,x_n$		
檢定統計量	$\overline{X}=\frac{\Sigma x_i}{n}$		
H_0為真時，檢定統計量的抽樣分配	$\overline{X}\sim N(\mu_1,\frac{\sigma^2}{n})$	$\overline{X}\sim N(\mu_2,\frac{\sigma^2}{n})$	$\overline{X}\sim N(\mu_3,\frac{\sigma^2}{n})$
標準化	$\frac{\overline{X}-\mu_1}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$	$\frac{\overline{X}-\mu_2}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$	$\frac{\overline{X}-\mu_3}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$
顯著水準α下的拒絕域 R	$\left\lvert\frac{\overline{X}-\mu_1}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right\rvert>t_{\alpha/2}(n-1)$	$\frac{\overline{X}-\mu_2}{\frac{S}{\sqrt{n}}}>t_{\alpha}(n-1)$	$\frac{\overline{X}-\mu_3}{\frac{S}{\sqrt{n}}}<-t_{\alpha}(n-1)$

圖 11-3-1　常態母群體σ^2未知下μ的檢定程序

1h1511.tpf-7 5/14/2002 13:57:16



$X\sim(\mu,\sigma^2)$

擬定H_0、H_1	$H_0:\mu=\mu_1$ $H_1:\mu\neq\mu_1$ （雙尾檢定）	$H_0:\mu\leqq\mu_2$ $H_1:\mu>\mu_2$ （右尾檢定）	$H_0:\mu\geqq\mu_3$ $H_1:\mu<\mu_3$ （左尾檢定）
抽樣	$x_1,x_2,\cdots,x_n$ （$n\geq30$）		
檢定統計量	$\overline{X}=\dfrac{\Sigma x_i}{n}$		
H_0為真時，檢定統計量的抽樣分配	$\overline{X}\doteq N(\mu_1,\dfrac{\sigma^2}{n})$	$\overline{X}\doteq N(\mu_2,\dfrac{\sigma^2}{n})$	$\overline{X}\doteq N(\mu_3,\dfrac{\sigma^2}{n})$
標準化	$\dfrac{\overline{X}-\mu_1}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\doteq N(0,1)$	$\dfrac{\overline{X}-\mu_2}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\doteq N(0,1)$	$\dfrac{\overline{X}-\mu_3}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\doteq N(0,1)$
顯著水準α下的拒絕域 R	$\left\lvert\dfrac{\overline{X}-\mu_1}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right\rvert>Z_{\alpha/2}$	$\dfrac{\overline{X}-\mu_2}{\frac{S}{\sqrt{n}}}>Z_\alpha$	$\dfrac{\overline{X}-\mu_3}{\frac{S}{\sqrt{n}}}<-Z_\alpha$

圖 11-4-1　非常態母群體平均數μ的檢定程序

1h1511.tpf-8 5/14/2002 13:57:16

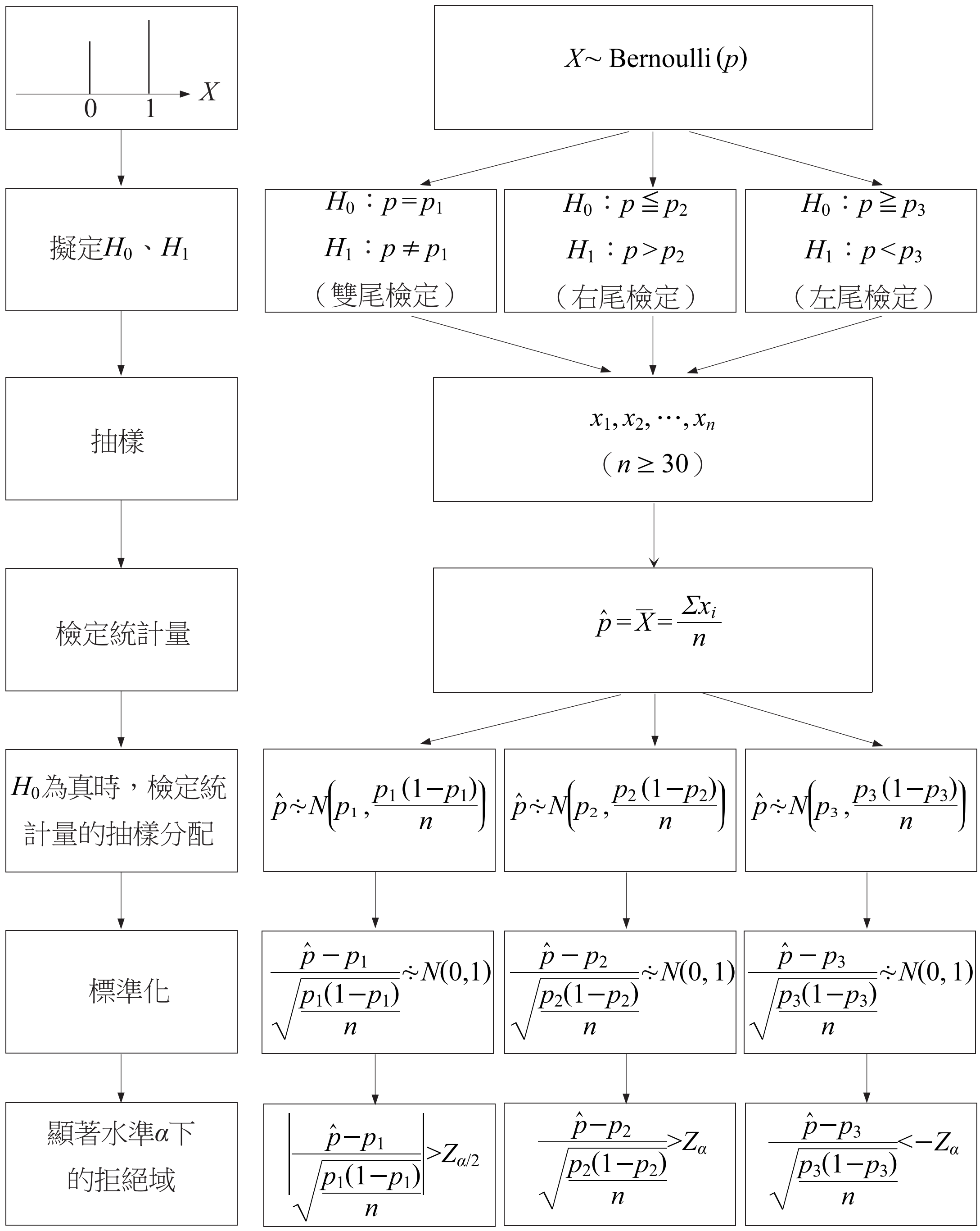


圖 11-5-1　母群體比例值 p 的檢定程序

1h1511.tpf-9 5/14/2002 13:57:16

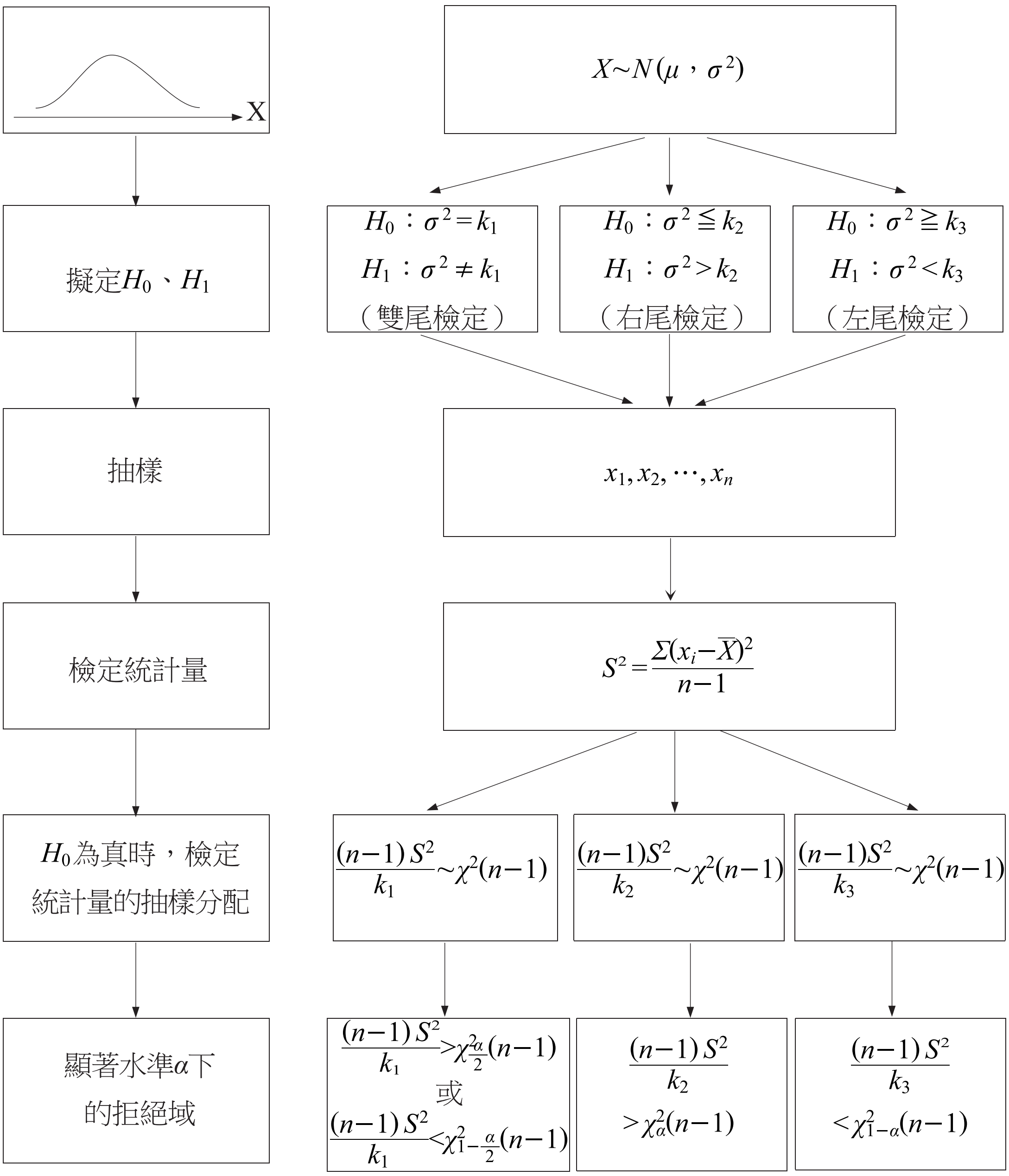


圖 11-6-1　常態母群體變異數 σ^2 的檢定程序

1h1511.tpf-10 5/14/2002 13:57:16

11.1 $X \sim N(\mu, 20)$，隨機樣本為 12, 10, 15, 18, 22, 19

(1)在$\alpha = 0.05$下檢定H_0：$\mu \le 12$，H_1：$\mu > 12$。

(2)計算 p 值。

解：

(1)
$$H_0 : \mu \le 12$$
$$H_1 : \mu > 12$$

$\alpha = 0.05$，$Z_{0.05} = 1.645$，以$\overline{X}$為檢定統計量，則這個檢定的拒絕域 R 為

$$R = \left\{ \overline{X} \,\middle|\, \frac{\overline{X} - 12}{\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{n}}} > 1.645 \right\}$$

根據本題樣本資料計算檢定值

$$\overline{X} = 16$$
$$\frac{\overline{X} - 12}{\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{n}}} = \frac{16 - 12}{\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}}} = 2.19 > 1.645$$

所以檢定結果為拒絕H_0

(2)$p = P(Z > 2.19) = 0.01422$

11.2 某產品的品質規格為 4，在生產線上隨機抽取 6 個樣本，測得其品質資料為 4.03, 4.01, 3.95, 3.96, 4.02, 3.94。假設品質資料為常態分配且其變異數為 0.008

(1)在$\alpha = 0.05$下檢定該批產品品質平均值是否偏離規格。

(2)計算這個檢定的 p 值。

解：

(1)以 X 表示品質資料，$X \sim N(\mu, 0.008)$，則這個檢定的H_0及H_1為

$$H_0 : \mu = 4$$
$$H_1 : \mu \ne 4$$

$\alpha = 0.05$，$Z_{0.025} = 1.96$。所以這個檢定的拒絕域 R 為

$$R=\left\{\overline{X}\left|\left|\frac{\overline{X}-4}{\frac{\sqrt{0.008}}{\sqrt{6}}}\right|>1.96\right.\right\}$$

根據本題樣本資料計算檢定值為

$$\overline{X}=3.985$$

$$\left|\frac{\overline{X}-4}{\frac{\sqrt{0.008}}{\sqrt{n}}}\right|=\left|\frac{3.985-4}{\frac{\sqrt{0.008}}{\sqrt{6}}}\right|=\left|-0.41\right|=0.41<1.96$$

所以檢定結果為不拒絕H_0，這表示生產線上所生產的產品品質並未明顯偏離其規格。

(2)$p=P(Z<-0.410)\times 2=0.681$

11.3 在第 1 題的檢定中，以(1)所建立的拒絕域為檢定法則，則

(1)若 $\mu=11$ 則這個檢定可能的決策失誤為何？並計算其機率。

(2)若 $\mu=10$ 則這個檢定可能的決策失誤為何？並計算其機率。

(3)若 $\mu=13$ 則這個檢定可能的決策失誤為何？並計算其機率。

(4)若 $\mu=14$ 則這個檢定可能的決策失誤為何？並計算其機率。

解：

$$H_0：\mu\le 12$$
$$H_1：\mu>12$$

顯著水準 $\alpha=0.05$ 下，第 1 題對這個檢定所建構的決策法則（拒絕域）為

$$R=\left\{\overline{X}\left|\overline{X}>12+1.645\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}}\right.\right\}$$

(1)當 $\mu=11$ ，這個檢定可能的決策失誤為型一失誤，其機率為 α_1

$$\alpha_1=P\left(\text{拒絕 }H_0\,\middle|\,\mu=11\right)$$

$$=P\left(\overline{X}>12+1.645\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}}\middle|\mu=11\right)$$
$$=P\left(\frac{\overline{X}-11}{\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}}}>\frac{(12-11)+1.645\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}}}{\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}}}\right)$$
$$=P\left(Z>\frac{1}{\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}}}+1.645\right)$$
$$=P(Z>2.193)$$
$$=0.0142$$

⑵當 $\mu=10$，這個檢定可能的決策失誤為型一失誤，其機率為 α_2

$$\alpha_2=P\left(\text{拒絕 } H_0\middle|\mu=10\right)$$
$$=P\left(\overline{X}>12+1.645\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}}\middle|\mu=10\right)$$
$$=P\left(\frac{\overline{X}-10}{\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}}}>\frac{(12-10)+1.645\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}}}{\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}}}\right)$$
$$=P\left(Z>\frac{2}{\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}}}+1.645\right)$$
$$=P(Z>2.74)$$
$$=0.0031$$

⑶當 $\mu=13$，這個檢定可能的決策失誤為型二失誤，其機率為 β_1

$$\beta_1=P\left(\text{不拒絕 } H_0\middle|\mu=13\right)$$
$$=P\left(\overline{X}\le 12+1.645\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}}\middle|\mu=13\right)$$

1h1511.tpf-13 5/14/2002 13:57:16

$$=P\left(\frac{\overline{X}-13}{\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}}}\leq\frac{(12-13)}{\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}}}+1.645\right)$$
$$=P(Z\leq 1.097)$$
$$=0.8637$$

(4)當 $\mu=14$，這個檢定可能的決策失誤為型二失誤，其機率為 β_2

$$\beta_2=P\left(\text{不拒絕 } H_0 \middle| \mu=14\right)$$
$$=P\left(\overline{X}\leq 12+1.645\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}}\middle|\mu=14\right)$$
$$=P\left(\frac{\overline{X}-14}{\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}}}\leq\frac{(12-14)+1.645\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}}}{\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}}}\right)$$
$$=P\left(Z\leq\frac{(12-14)}{\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}}}+1.645\right)$$
$$=P(Z\leq 0.55)$$
$$=0.7087$$

11.4 在第 2 題中，以(1)所建構的拒絕域為決策法則，則

(1)若 $\mu=3.99$，則這個檢定可能的決策失誤為何？並計算其機率。

(2)若 $\mu=4.01$，則這個檢定可能的決策失誤為何？並計算其機率。

解：

$$H_0：\mu=4$$
$$H_1：\mu\neq 4$$

顯著水準 $\alpha=0.05$ 下，第 2 題對這個檢定所建構的決策法則（拒絕域）為

$$R=\left\{\overline{X}\ \middle|\ \overline{X}>4+1.96\frac{\sqrt{0.008}}{\sqrt{6}}\text{ 或 }\overline{X}<4-1.96\frac{\sqrt{0.008}}{\sqrt{6}}\right\}$$

⑴當 $\mu=3.99$，這個檢定可能的決策失誤為型二失誤，其機率 β_1 為

$$\beta_1=P\left(\text{不拒絕 } H_0 \,\middle|\, \mu=3.99\right)$$
$$=P\left(4-1.96\frac{\sqrt{0.008}}{\sqrt{6}}\le \overline{X}\le 4+1.96\frac{\sqrt{0.008}}{\sqrt{6}} \,\middle|\, \mu=3.99\right)$$
$$=P\left(\frac{(4-3.99)-1.96\frac{\sqrt{0.008}}{\sqrt{6}}}{\frac{\sqrt{0.008}}{\sqrt{6}}}\le \frac{\overline{X}-3.99}{\frac{\sqrt{0.008}}{\sqrt{6}}}\le \frac{(4-3.99)+1.96\frac{\sqrt{0.008}}{\sqrt{6}}}{\frac{\sqrt{0.008}}{\sqrt{6}}}\right)$$
$$=P\left(\frac{(4-3.99)}{\frac{\sqrt{0.008}}{\sqrt{6}}}-1.96\le Z\le \frac{(4-3.99)}{\frac{\sqrt{0.008}}{\sqrt{6}}}+1.96\right)$$
$$=P(-1.686\le Z\le 2.234)$$
$$=0.941$$

⑵當 $\mu=4.01$，這個檢定可能的決策失誤為型二失誤，其機率 β_2 為

$$\beta_2=P\left(\text{不拒絕 } H_0 \,\middle|\, \mu=4.01\right)$$
$$=P\left(4-1.96\frac{\sqrt{0.008}}{\sqrt{6}}\le \overline{X}\le 4+1.96\frac{\sqrt{0.008}}{\sqrt{6}} \,\middle|\, \mu=4.01\right)$$
$$=P\left(\frac{(4-4.01)-1.96\frac{\sqrt{0.008}}{\sqrt{6}}}{\frac{\sqrt{0.008}}{\sqrt{6}}}\le \frac{\overline{X}-4.01}{\frac{\sqrt{0.008}}{\sqrt{6}}}\le \frac{(4-4.01)+1.96\frac{\sqrt{0.008}}{\sqrt{6}}}{\frac{\sqrt{0.008}}{\sqrt{6}}}\right)$$
$$=P\left(\frac{(4-4.01)}{\frac{\sqrt{0.008}}{\sqrt{6}}}-1.96\le Z\le \frac{(4-4.01)}{\frac{\sqrt{0.008}}{\sqrt{6}}}+1.96\right)$$
$$=P(-2.234\le Z\le 1.686)$$
$$=0.941$$

11.5 隨機抽樣 6 家房地產投資公司的投資報酬率為 0.11, 0.13, 0.17, 0.21, 0.12, 0.11。假設投資報酬率為常態分配

⑴在顯著水準 $\alpha=0.05$ 下檢定平均投資報酬率是否超過 0.1。

(2)計算這個檢定的 p 值。

解：

(1)以 μ 表示投資報酬率的平均值，則這個檢定的 H_0 及 H_1 為

$$H_0：\mu \leq 0.1$$
$$H_1：\mu > 0.1$$

$\alpha = 0.05$，$t_{0.05}(5) = 2.015$，以 $\overline{X}$ 為檢定統計量，則這個檢定的拒絕域 R 為

$$R = \left\{ \overline{X} \,\middle|\, \frac{\overline{X} - 0.1}{\frac{S}{\sqrt{6}}} > 2.015 \right\}$$

根據本題樣本資料計算檢定統計值

$$\overline{X} = 0.14167$$
$$S = 0.0402$$
$$\frac{\overline{X} - 0.1}{\frac{S}{\sqrt{6}}} = \frac{0.14167 - 0.1}{\frac{0.0402}{\sqrt{6}}} = 2.54 > 2.015$$

所以檢定結果為拒絕 H_0，這表示房地產的平均投資報酬率顯著超過 0.1。

(2)$p = P(t(5) > 2.54) = 0.0259$

11.6 消費者機構欲檢測 250C.C.鋁鉑包飲料的含量是否短少，隨機抽樣 5 盒，測量其容量分別為 251, 248, 249, 247, 245。假設容量為常態分配

(1)在 $\alpha = 0.05$ 下檢定鋁鉑包飲料的平均含量是否不足 250C.C.。

(2)計算這個檢定的 p 值。

解：

(1)以 μ 表示平均含量，則這個檢定的 H_0 及 H_1 為

$$H_0：\mu = 250$$
$$H_1：\mu < 250$$

$\alpha = 0.05$，$t_{0.05}(4) = 2.13$。以 $\overline{X}$ 為檢定統計量，則這個檢定的拒絕域 R 為

$$R=\left\{\overline{X}\left|\frac{\overline{X}-250}{\frac{S}{\sqrt{5}}}<-2.13\right.\right\}$$

根據本題樣本資料計算檢定統計值

$$\overline{X}=248$$
$$S=2.236$$
$$\frac{\overline{X}-250}{\frac{S}{\sqrt{5}}}=\frac{248-250}{\frac{2.236}{\sqrt{5}}}=-2>-2.13$$

所以檢定結果為不拒絕H_0，這表示 250C.C.鋁鉑包飲料的平均含量並未明顯短少。

(2) $p=P(t(4)<-2)=0.0581$

11.7 X 為非常態母群體，隨機抽取 64 個樣本，在 $\alpha=0.05$ 下檢定下列假設

$$H_0: \mu=100$$
$$H_1: \mu>100$$

(1)若$\overline{X}=104$，$S=9.5$，則檢定結果如何？

(2)若$\overline{X}=104$，$S=20$，則檢定結果如何？

解：

(1)
$$H_0: \mu=100$$
$$H_1: \mu>100$$

$\alpha=0.05$，$Z_{0.05}=1.645$。以$\overline{X}$為檢定統計量，則這個檢定的拒絕域 R 為

$$R=\left\{\overline{X}\left|\frac{\overline{X}-100}{\frac{S}{\sqrt{n}}}>1.645\right.\right\}$$

根據本題樣本資料，$n=64$，$\overline{X}=104$，$S=9.5$計算檢定統計值

$$\frac{\overline{X}-100}{\frac{S}{\sqrt{n}}}=\frac{104-100}{\frac{9.5}{\sqrt{64}}}=3.3684>1.645$$

所以檢定結果為拒絕 H_0。

⑵當 $S=20$，計算檢定統計值為

$$\frac{\overline{X}-100}{\frac{S}{\sqrt{n}}}=\frac{104-100}{\frac{20}{\sqrt{64}}}=1.6<1.645$$

所以檢定結果為不拒絕 H_0 。

（註）⑴、⑵可知樣本數及變異數對檢定結果有很大的影響。

11.8 民意調查中，隨機抽樣 1200 位民眾中有 500 位滿意政府的施政表現，在顯著水準 $\alpha=0.05$ 下檢定滿意度比例(p)的假設

⑴ H_0：$p=0.4$，H_1：$p>0.4$。

⑵計算這個檢定的 p 值。

解：

⑴
$$H_0：p=0.4$$
$$H_1：p>0.4$$

$\alpha=0.05$，$Z_{0.05}=1.645$。以樣本比例 $\hat{p}$ 為檢定統計量，則這個檢定的拒絕域 R 為

$$R=\left\{\hat{p}\,\middle|\,\frac{\hat{p}-0.4}{\sqrt{\frac{(0.4)(0.6)}{n}}}>1.645\right\}$$

根據本題樣本資料計算檢定值

$$\hat{p}=\frac{500}{1200}=0.4167$$

$$\frac{\hat{p}-0.4}{\sqrt{\frac{(0.4)(0.6)}{n}}}=\frac{0.4167-0.4}{\sqrt{\frac{(0.4)(0.6)}{1200}}}=1.1785<1.645$$

1h1511.tpf-18 5/14/2002 13:57:16

所以檢定結果為不拒絕 H_0，這表示對政府施政滿意的民眾並未顯著超過 4 成。

(2) $p=P(Z>1.1785)=0.1193$

11.9 腸病毒流行期間，隨機抽樣 1800 位小朋友其中有 500 位受到感染。在顯著水準 $\alpha=0.05$ 下檢定小朋友腸病毒感染率(p)

(1) H_0：$p=0.26$，H_1：$p>0.26$。

(2)計算這個檢定的 p 值。

解：

(1)
$$H_0：p=0.26$$
$$H_1：p>0.26$$

$\alpha=0.05$，$Z_{0.05}=1.645$。以樣本比例 $\hat{P}$ 為檢定統計量，則這個檢定的拒絕域 R 為

$$R=\left\{\hat{p}\ \middle|\ \frac{\hat{p}-0.26}{\sqrt{\frac{(0.26)(0.74)}{n}}}>1.645\right\}$$

根據本題樣本資料計算檢定值

$$\hat{p}=\frac{500}{1800}=0.278$$
$$\frac{\hat{p}-0.26}{\sqrt{\frac{(0.26)(0.74)}{1800}}}=\frac{0.278-0.26}{\sqrt{\frac{(0.26)(0.74)}{1800}}}=1.719>1.645$$

所以檢定結果為拒絕 H_0，這表示腸病毒感染率顯著超過 26%。

(2) $p=P(z>1.719)=0.0427$

11.10 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，隨機樣本 14, 25, 21, 17, 12, 30

(1)在顯著水準 $\alpha=0.05$ 下檢定 H_0：$\sigma^2=50$，H_1：$\sigma^2<50$。

(2)計算這個檢定的 p 值。

解：

(1)
$$H_0：\sigma^2=50$$
$$H_1：\sigma^2<50$$

$\alpha=0.05$，$\chi^2_{0.05}(5)=1.145$。以 S^2 為檢定統計量，則這個檢定的拒絕域 R 為

$$R=\left\{S^2\left|\frac{(n-1)S^2}{50}<1.145\right.\right\}$$

根據本題樣本資料計算檢定值

$$S^2=46.97$$
$$\frac{(n-1)S^2}{50}=\frac{5(46.97)}{50}=4.7>1.145$$

所以檢定結果為不拒絕 H_0

(2)$p=P\left(\chi^2(5)>4.7\right)=0.5459$

11.11 隨機抽樣台北市小型辦公室月租金為 21,000、30,000、24,000、32,000、27,000。假設月租金為常態分配

(1)在 $\alpha=0.05$ 下檢定月租金的標準差大於 2,500 元。

(2)計算這個檢定的 p 值。

解：

(1)以σ，σ^2 分別表示月租金的標準差及變異數，則這個檢定的 H_0 及 H_1 為

$$H_0：\sigma^2\le(2{,}500)^2=6{,}250{,}000$$
$$H_1：\sigma^2>6{,}250{,}000$$

$\alpha=0.05$，$\chi^2_{0.05}(4)=9.487$，以 S^2 為檢定統計量，則這個檢定的拒絕域 R 為

$$R=\left\{S^2\left|\frac{(n-1)S^2}{6{,}250{,}000}>9.487\right.\right\}$$

根據本題樣本資料計算檢定值

1h1511.tpf-20 5/14/2002 13:57:16

$$S^2 = 19{,}700{,}000$$

$$\frac{(n-1)S^2}{6{,}250{,}000} = \frac{4(19{,}700{,}000)}{6{,}250{,}000} = 12.608 > 9.487$$

所以檢定結果為拒絕 H_0，這表示小型辦公室月租金的標準差顯著大於 2,500 元。

(2) $p = P(\chi^2(4) > 12.608) = 0.027$

11.12 為了檢定母群體參數 θ，從母群體中隨機抽取 10 個樣本 $x_1, x_2, ..., x_{10}$，若檢定統計量的 $\hat{\theta} = f(x_1, x_2, ..., x_{10})$ 的抽樣分配為 $g(t)$，

$$g(t) = \begin{cases} -t+\theta+1 & \theta < t \le \theta+1 \\ t-\theta+1 & \theta-1 < t \le \theta \end{cases}$$

(1) 顯著水準 $\alpha = \frac{1}{32}$ 下，H_0：$\theta \le 5$，H_1：$\theta > 5$ 的檢定法則。

(2) 檢定統計量 $\hat{\theta} = 5\frac{1}{2}$ 時，上述(1)假設檢定的 p 值是多少？

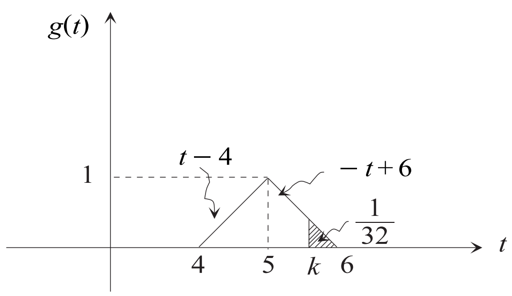
(3) 當 $\theta = 6$ 時，上述(1)假設檢定將可能發生那種失誤，同時計算這個失誤發生的機率是多少？

解：

(1) 在 H_0 為真的前提 $(\theta = 5)$，$\hat{\theta}$ 的抽樣分配為

$$g(t) = \begin{cases} -t+6 & 5 < t \le 6 \\ t-4 & 4 < t \le 5 \end{cases}$$

若以圖形來表示上述 $\hat{\theta}$ 的機率密度函數則為



這是個右尾檢定，令 k 為拒絕域之臨界點，則拒絕域 R 為

$$R=\left\{t \,\middle|\, t>k\right\}$$

為了達到顯著水準 $\alpha=\dfrac{1}{32}$ 之要求，則

$$P(t>k)=\int_k^6(-t+6)dt=\frac{1}{32}$$

$$\int_k^6(-t+6)dt=\left(-\frac{1}{2}t^2+6t\right)\Big|_k^6$$

$$=18-6k+\frac{1}{2}k^2$$

所以，

$$18-6k+\frac{1}{2}k^2=\frac{1}{32}$$

$$16k^2-192k+575=0$$

$$(4k-23)(4k-25)=0$$

$$k=\frac{23}{4} \quad \text{或} \quad \frac{25}{4}$$（不合，因為它大於 6）

所以，顯著水準 $\alpha=\dfrac{1}{32}$ 下，這個檢定的拒絕域 R 為

$$R=\left\{\hat{\theta} \,\middle|\, \hat{\theta}>\frac{23}{4}=5\frac{3}{4}\right\}$$

⑵當 $\hat{\theta}=5\dfrac{1}{2}$ 時，p 值的計算為

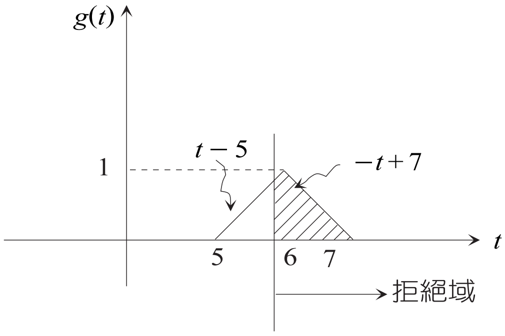
$$p\text{ 值 }=P\left(\hat{\theta}>5\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\int_5^{5\frac{1}{2}}(-t+6)dt$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{12}{32}=\frac{1}{8}$$

⑶當 $\theta=6$ 時，表示 H_1 為真，所以這個檢定有可能發生型二失誤（Type II error），其機率為 β 的計算如下：

當 $\theta=6$ 時，$\hat{\theta}$ 的機率分配若以圖形表示如下



斜影部分面積為型二失誤發生的機率 β，所以

$$
\begin{aligned}
\beta &= P\left(\hat{\theta} > 5\frac{3}{4} \middle| \theta = 6\right) \\
&= \int_{5\frac{3}{4}}^{7} (-t+7)\,dt \\
&= \frac{25}{32}
\end{aligned}
$$

11.13 某鄉村地區五年前調查顯示有 20%的家庭為低收入戶，為了確認目前的狀況是否已有改善，在該地區隨機取樣 400 戶其中有 70 戶為低收入戶

⑴在顯著水準 $\alpha=0.05$ 下進行上述檢定。

⑵這個檢定的 p 值（p-value）？並依此說明檢定結果。

解：

⑴該檢定的虛無假設及對應假設為

$$
\begin{aligned}
H_0 &: p = 0.2 \\
H_1 &: p < 0.2
\end{aligned}
$$

檢定統計量 $\hat{p}$ 為常態分配，左尾檢定臨界值 $Z_{0.05}=-1.645$，所以顯著水準 $\alpha=0.05$ 的拒絕域 R 為

$$R=\left\{\hat{p}\left|\frac{\hat{p}-0.2}{\sqrt{\frac{(0.2)(0.8)}{400}}}<-1.645\right.\right\}$$

根據本題調查資料$\hat{p}=\frac{70}{400}$，

$$\frac{\frac{70}{400}-0.2}{\sqrt{\frac{(0.2)(0.8)}{400}}}=-1.25>-1.645$$

所以，檢定結論為不拒絕 H_0，這表示狀況並未明顯的改善。

⑵本題為左尾檢定，所以 p 值為

$$\begin{aligned} p\text{ 值} &= P(Z<-1.25) \\ &= 0.1056 \end{aligned}$$

若我們預設的顯著水準為 α，則當$0.1056<\alpha$時，檢定結果為拒絕H_0，否則不拒絕 H_0。

1h1511.tpf-24 5/14/2002 13:57:16