第 10 章

估計(二)

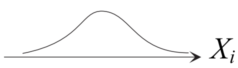
	$X_1 \sim N(\mu, \sigma_1^2)$ $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
抽樣	$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n_1}$ $x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n_2}$
估計量	$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 = \dfrac{\sum x_{1i}}{n_1} - \dfrac{\sum x_{2i}}{n_2}$
估計量的抽樣分配	$\overline{X}_1 - \overline{X_2} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$
標準化	$\dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$
信賴區間	$\left[(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}, (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$

圖 10-1-1　常態母群體σ_1^2, σ_2^2已知時$\mu_1 - \mu_2$的估計程序

	$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$
↓	↓
抽樣	$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n_1}$ $x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n_2}$
↓	↓
估計量	$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 = \dfrac{\Sigma x_{1i}}{n_1} - \dfrac{\Sigma x_{2i}}{n_2}$
↓	↓
估計量的抽樣分配	$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)\right)$
↓	↓
標準化	$\dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^2\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$ 其中$S_p^2 = \dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$
↓	↓
信賴區間	$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)\sqrt{S_p^2\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}$

圖 10-2-1　常態母群體σ_1^2, σ_2^2未知但相等時$\mu_1 - \mu_2$的估計程序

	$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
抽樣	$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n_1}$ $x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n_2}$
估計量	$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 = \dfrac{\sum x_{1i}}{n_1} - \dfrac{\sum x_{2i}}{n_2}$
估計量的抽樣分配	$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$
標準化	$\dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}} \doteq t(v)$ 其中$v = \left(\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2 \Bigg/ \dfrac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{\left(\dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}$
信賴區間	$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \pm t_{\alpha/2}(v)\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}$

圖 10-3-1　常態母群體σ_1^2, σ_2^2未知且不相等時$\mu_1 - \mu_2$的估計程序

	$X_1 \sim (\mu_1, \sigma_1^2)$ $X_2 \sim (\mu_2, \sigma_2^2)$ σ_1^2, σ_2^2未知且不相等
抽樣	$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n_1}$ $x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n_2}$
估計量	$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 = \dfrac{\Sigma x_{1i}}{n_1} - \dfrac{\Sigma x_{2i}}{n_2}$
估計量的抽樣分配	$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \doteq N\left(\mu_1 - \mu_2, \dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$
標準化	$\dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}} \doteq N(0,1)$
信賴區間	$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}$

圖 10-4-1　非常態母群體σ_1^2, σ_2^2未知且不相等時$\mu_1 - \mu_2$的估計程序

	$X_1 \sim \text{Bernoulli}\,(p_1)$ $X_2 \sim \text{Bernoulli}\,(p_2)$
抽樣	$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n_1}$ $x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n_2}$ $n_1, n_2 \geq 30$
估計量	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = \dfrac{\Sigma x_{1i}}{n_1} - \dfrac{\Sigma x_{2i}}{n_2}$
估計量的抽樣分配	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \doteq N\left(p_1 - p_2, \dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$
標準化	$\dfrac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \dfrac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}} \doteq N(0,1)$
信賴區間	$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \dfrac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$

圖 10-5-1　兩母群體比例差 $p_1 - p_2$ 的估計程序

定理 *10-6-1*：*F* 分配（F distribution）

若 X_1 及 X_2 為兩個自由度 v_1 及 v_2 的卡方隨機變數，也就是

$$X_1 \sim \chi^2(v_1)$$
$$X_2 \sim \chi^2(v_2)$$

則我們稱它們各自除以自由度後再相除得到的統計量為F統計量，也就是

$$F = \frac{\frac{X_1}{v_1}}{\frac{X_2}{v_2}}$$

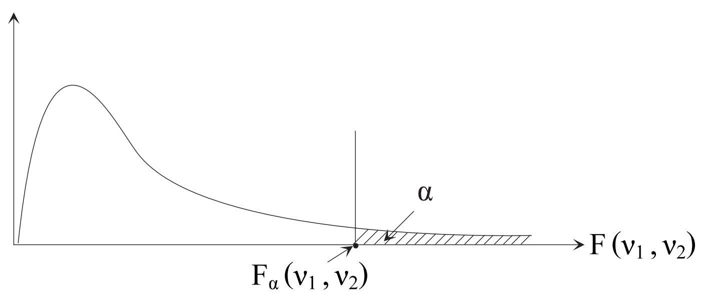
並以 $F(v_1,v_2)$ 表示 F 之分佈，以符號表示便為

$$\frac{\frac{X_1}{v_1}}{\frac{X_2}{v_2}} \sim F(v_1, v_2)$$

由於 v_1 及 v_2 分別在 F 統計量的分子及分母，所以我們也稱v_1為 F 分配的分子自由度，v_2為 F 分配的分母自由度。

定義 *10-6-1*：$F_\alpha(v_1, v_2)$

在$F(v_1, v_2)$ 分配中，我們切割出它的右尾面積α的切割點 K，使得 $P(F(v_1, v_2) \geq K) = \alpha$（如下圖）。通常為了操作上的方便，我們將$K$以 $F_\alpha(v_1, v_2)$符號表示之。也就是



$$P\left(F(v_1, v_2) \geq F_\alpha(v_1, v_2)\right) = \alpha$$

定理 *10-6-2*：$F(v_1, v_2)$ 與 $F(v_2, v_1)$ 的關係

$$F_\alpha(v_1, v_2) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(v_2, v_1)}$$

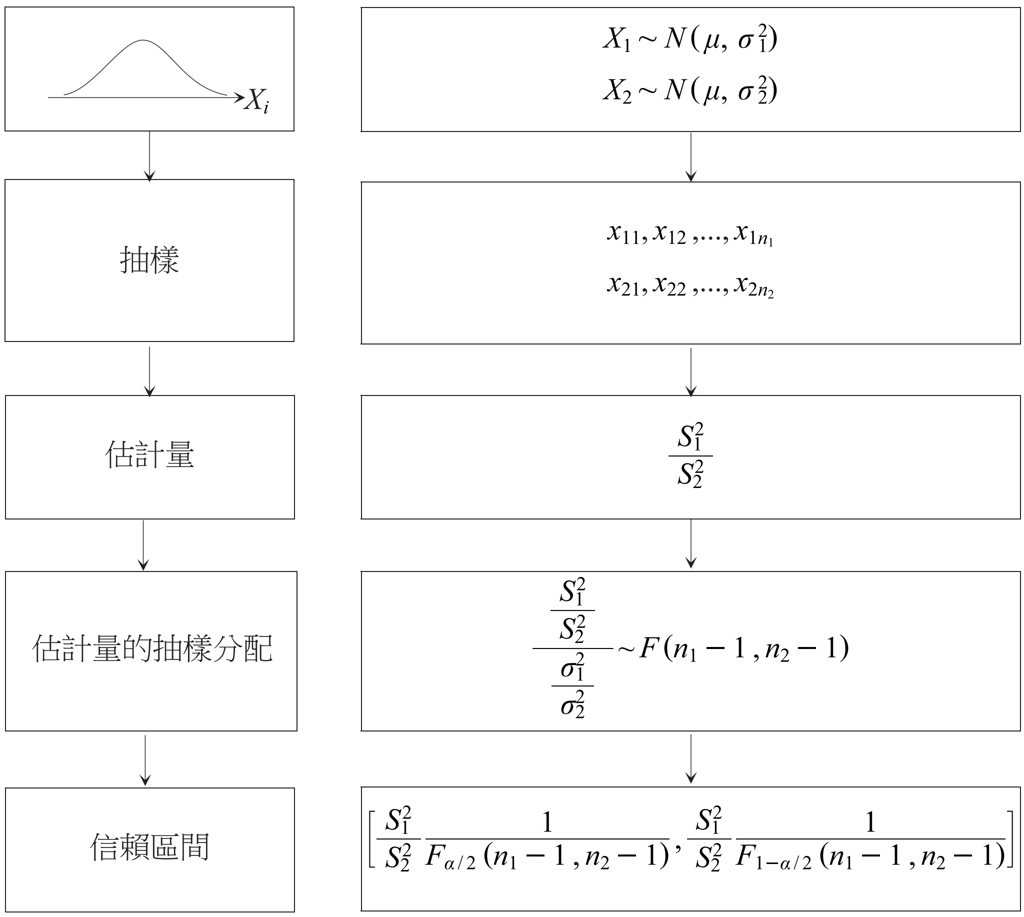


圖 10-7-1　常態母群體變異數比值 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的估計程序

10.1 $X_1 \sim N(\mu_1,21)$，$X_2 \sim N(\mu_2,13)$，隨機抽取樣本為

X_1	45	49	39	46	51	52	43
X_2	22	18	24	25	29	23	

(1)估計 $\mu_1-\mu_2$ 的 95%信賴區間。

(2)估計 $\mu_1-\mu_2$ 的 99%信賴區間。

解：

(1)$1-\alpha=0.95$，$\frac{\alpha}{2}=0.025$，$Z_{0.025}=1.96$。所以 $\mu_1-\mu_2$ 的 95%信賴區間為

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)\pm 1.96\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

根據本題樣本資料 $\overline{X}_1=46.43$，$\overline{X}_2=21.29$，$\sigma_1^2=21$，$\sigma_2^2=13$

計算出 $\mu_1-\mu_2$ 的 95%信賴區間為

$$(46.43-21.29)\pm 1.96\sqrt{\frac{21}{7}+\frac{13}{6}}$$

或

〔18.47　,　27.38〕

(2)同理，$\mu_1-\mu_2$ 的 99%信賴區間 ($Z_{0.005}=2.576$) 為

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)\pm 2.576\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

根據本題樣本資料計算出 $\mu_1-\mu_2$ 的 99%信賴區間為

$$(46.43-21.29)\pm 2.576\sqrt{\frac{21}{7}+\frac{13}{6}}$$

或

〔17.07　,　28.78〕

10.2 $X_1 \sim N(\mu_1,\sigma^2)$，$X_2 \sim N(\mu_2,\sigma^2)$，隨機抽取兩組獨立樣本如下

X_1	5	9	13	11	7	6	12
X_2	29	31	35	37	32	34	

(1)估計 $\mu_1-\mu_2$ 的 95%信賴區間。

(2)估計 $\mu_1-\mu_2$ 的 99%信賴區間。

解：

(1)$n_1=7$，$n_2=6$，$\overline{X}_1=9$，$\overline{X}_2=33$，$S_1^2=9.667$，$S_2^2=8.4$。

$$\begin{aligned}S_P^2&=\left(\frac{n_1-1}{n_1+n_2-2}\right)S_1^2+\left(\frac{n_2-1}{n_1+n_2-2}\right)S_2^2\\&=\frac{6(9.667)+5(8.4)}{11}\\&=9.091\end{aligned}$$

$1-\alpha=0.95$，$\dfrac{\alpha}{2}=0.025$，$t_{0.025}(11)=2.201$，所以$\mu_1-\mu_2$的 95%信賴區間為

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)\pm 2.201\sqrt{S_p^2(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}$$

根據本題樣本資料計算出$\mu_1-\mu_2$的 95%信賴區間為

$$(9-33)\pm 2.201\sqrt{9.091\,(\frac{1}{7}+\frac{1}{6})}$$

或

$$[-27.692 \quad , \quad -20.308]$$

(2)同理，$\mu_1-\mu_2$的 99%信賴區間為$(t_{0.005}(11)=3.106)$

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)\pm 3.106\sqrt{S_P^2(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}$$

根據本題樣本資料計算出$\mu_1-\mu_2$的 99%信賴區間為

$$(9-33)\pm 3.106\sqrt{9.091\,(\frac{1}{7}+\frac{1}{6})}$$

或

〔-29.18 , -18.82〕

10.3 隨機抽樣私立及公立醫院病人健保給付金額如下，假設每人次健保給付金額為常態分配且兩變異數相等

公立	640	665	830	780	694	
私立	531	598	788	699	698	675

⑴估計公私立醫院每位病人健保給付金額平均數差的 95%信賴區間。

⑵估計公私立醫院每位病人健保給付金額平均數差的 99%信賴區間。

解：

⑴$n_1=5$，$n_2=6$，$\overline{X}_1=721.8$，$\overline{X}_2=644.8$，$S_1^2=6446.2$，$S_2^2=7983.8$

$$S_P^2=\left(\frac{n_1-1}{n_1+n_2-2}\right)S_1^2+\left(\frac{n_2-1}{n_1+n_2-2}\right)S_2^2$$
$$=\frac{4(6446.2)+5(7983.8)}{9}$$
$$=7300.4$$

$1-\alpha=0.95$，$\frac{\alpha}{2}=0.025$，$t_{0.025}(9)=2.262$。所以$\mu_1-\mu_2$的 95%信賴區間為

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)\pm 2.262\sqrt{S_P^2(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}$$

根據本題樣本資料計算出$\mu_1-\mu_2$的 95%信賴區間為

$$(721.8-644.8)\pm 2.262\sqrt{7300.4\,(\frac{1}{5}+\frac{1}{6})}$$

或

〔-40.03 , 194.03〕

⑵同理，$t_{0.005}(9)=3.25$，所以$\mu_1-\mu_2$的 99%信賴區間為

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)\pm 3.25\sqrt{S_P^2(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}$$

根據本題樣本資料計算出$\mu_1-\mu_2$的 99%信賴區間為

$$(721.8-644.8)\pm 3.25\sqrt{7300.4\,(\frac{1}{5}+\frac{1}{6})}$$

或

$$[-91.15\quad,\quad 245.15]$$

10.4 隨機抽取城市 1 及城市 2 數日垃圾清運量（單位：公噸）如下，假設兩城市每日垃圾量為常態分配且變異數相等

城市 1	614	565	730	680	594	
城市 2	554	598	788	699	698	674

⑴估計兩城市每日垃圾量的平均數差之 95%信賴區間。

⑵估計兩城市每日垃圾量的平均數差之 99%信賴區間。

解：

⑴$n_1=5$，$n_2=6$，$\overline{X}_1=636.6$，$\overline{X}_2=668.5$，$S_1^2=4514.8$，$S_2^2=6838.3$

$$\begin{aligned}S_P^2&=(\frac{n_1-1}{n_1+n_2-2})S_1^2+(\frac{n_2-1}{n_1+n_2-2})S_2^2\\&=\frac{4(4514.8)+5(6838.3)}{9}\\&=5805.6\end{aligned}$$

$1-\alpha=0.95$，$t_{0.025}(9)=2.262$。所以$\mu_1-\mu_2$的 95%信賴區間為

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)\pm 2.262\sqrt{S_P^2(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}$$

根據本題樣本資料計算出$\mu_1-\mu_2$的 95%信賴區間為

$$(636.6-668.5)\pm 2.262\sqrt{5805.6\,(\frac{1}{5}+\frac{1}{6})}$$

或

$$〔-136.27 \quad , \quad 72.47〕$$

(2)同理，$t_{0.005}(9)=3.25$，所以 $\mu_1-\mu_2$ 的 99%信賴區間為

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)\pm 3.25\sqrt{S_P^2(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}$$

根據本題樣本資料計算出 $\mu_1-\mu_2$ 的 99%信賴區間為

$$(636.6-668.5)\pm 3.25\sqrt{5805.6(\frac{1}{5}+\frac{1}{6})}$$

或

$$〔-181.86 \quad , \quad 118.06〕$$

10.5 隨機抽樣兩地區的數月機車失竊記錄如下，假設機車失竊記錄為常態分配

地區 1	1150	1146	1132	1164	1120	1128
地區 2	898	904	912	899	909	

(1)估計兩地區每月平均失竊機車平均數差的 95%信賴區間。

(2)估計兩地區每月平均失竊機車平均數差的 99%信賴區間。

解：

(1)$\overline{X}_1=1140$，$\overline{X}_2=904.4$，$S_1^2=264$，$S_2^2=37.3$，$n_1=6$，$n_2=5$。

$$v=\frac{(\frac{264}{6}+\frac{37.3}{5})^2}{\frac{(\frac{264^2}{6})}{5}+\frac{(\frac{37.3}{5})^2}{4}}=6.602$$

取其最接近的整數 $v=7$，$t_{0.025}(7)=2.365$。所以 $\mu_1-\mu_2$ 的 95%信賴區間為

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)\pm 2.365\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

根據本題樣本資料計算出$\mu_1-\mu_2$的 95%信賴區間為

$$(1140-904.4)\pm 2.365\sqrt{\frac{264}{6}+\frac{37.3}{5}}$$

或

$$〔218.63 \quad , \quad 252.57〕$$

⑵同理，$t_{0.005}(7)=3.499$，所以$\mu_1-\mu_2$的 99%信賴區間為

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)\pm 3.499\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

根據本題樣本資料計算出$\mu_1-\mu_2$的 99%信賴區間為

$$(1140-904.4)\pm 3.499\sqrt{\frac{264}{6}+\frac{37.3}{5}}$$

或

$$〔210.86 \quad , \quad 260.34〕$$

10.6 隨機抽取都市地區及鄉村地區家庭居住空間（單位：坪）如下，假設家庭居住空間為常態分配

都市	28	29	28	30	27	26
鄉村	33	32	31	28	35	

⑴估計都市與鄉村地區每戶平均居住空間差的 95%信賴區間。

⑵估計都市與鄉村地區每戶平均居住空間差的 99%信賴區間。

解：

⑴$\overline{X}_1=28$，$\overline{X}_2=31.8$，$S_1^2=2$，$S_2^2=6.7$，$n_1=6$，$n_2=5$。

$$v=\frac{\left(\frac{2}{6}+\frac{6.7}{5}\right)^2}{\frac{\left(\frac{2^2}{6}\right)}{5}+\frac{\left(\frac{6.7}{5}\right)^2}{4}}=5.94$$

取其最接近的整數$v=6$，$t_{0.025}(6)=2.447$。所以$\mu_1-\mu_2$的 95%信賴區間為

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)\pm 2.447\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

根據本題樣本資料計算出$\mu_1-\mu_2$的 95%信賴區間為

$$(28-31.8)\pm 2.447\sqrt{\frac{2}{6}+\frac{6.7}{5}}$$

或

$$〔-6.957 \quad , \quad -0.643〕$$

⑵同理，$t_{0.005}(6)=3.707$，所以$\mu_1-\mu_2$的 99%信賴區間為

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)\pm 3.707\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

根據本題樣本資料計算出$\mu_1-\mu_2$的 99%信賴區間為

$$(28-31.8)\pm 3.707\sqrt{\frac{2}{6}+\frac{6.7}{5}}$$

或

$$〔-8.582 \quad , \quad 0.982〕$$

10.7 欲比較台北市內兩住宅區單位房價的差異，隨機抽取兩區的買賣成交案例各 36 案及 49 案，分別計算出單位房價（每坪）的樣本平均價為 25 萬元及 32 萬元，標準差為 1.5 萬及 2.5 萬。

⑴估計兩地區每坪平均價差的 95%信賴區間。

(2)估計兩地區每坪平均價差的 99%信賴區間。

解：

(1)$1-\alpha=0.95$，$Z_{0.025}=1.96$。所以$\mu_1-\mu_2$的 95%信賴區間為

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)\pm 1.96\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

根據本題樣本資料$n_1=36$，$n_2=49$，$\overline{X}_1=25$，$\overline{X}_2=32$，$S_1^2=(1.5)^2=2.25$，$S_2^2=(2.5)^2=6.25$，計算出$\mu_1-\mu_2$的 95%信賴區間為

$$(25-32)\pm 1.96\sqrt{\frac{2.25}{36}+\frac{6.25}{49}}$$

或

$$[-7.854 \quad , \quad -6.146]$$

(2)同理，$Z_{0.005}=2.575$。所以$\mu_1-\mu_2$的 99%信賴區間為

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)\pm 2.575\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

根據本題樣本資料計算出$\mu_1-\mu_2$的 99%信賴區間為

$$(25-32)\pm 2.575\sqrt{\frac{2.25}{36}+\frac{6.25}{49}}$$

或

$$[-8.122 \quad , \quad -5.878]$$

10.8 $X_1\sim(\mu_1,\sigma_1^2)$，$X_2\sim(\mu_2,\sigma_2^2)$ 分別自X_1及X_2隨機抽取 100 及 121 個樣本，其樣本平均數分別為 500 及 600，樣本標準差分別為 25 及 30。

(1)估計$\mu_1-\mu_2$的 95%信賴區間。

(2)估計$\mu_1-\mu_2$的 99%信賴區間。

解：

(1)$1-\alpha=0.95$，$Z_{0.025}=1.96$。所以$\mu_1-\mu_2$的 95%信賴區間為

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)\pm 1.96\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

根據本題樣本資料$n_1=100$，$n_2=121$，$\overline{X}_1=500$，$\overline{X}_2=600$，$S_1^2=(25)^2=225$，$S_2^2=(30)^2=900$，計算出$\mu_1-\mu_2$的 95%信賴區間

$$(500-600)\pm 1.96\sqrt{\frac{225}{100}+\frac{900}{121}}$$

或

$$[-107.25 \quad , \quad -92.75]$$

(2)同理，$1-\alpha=0.99$，$Z_{0.005}=2.575$。所以$\mu_1-\mu_2$的 99%信賴區間為

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)\pm 2.575\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

根據本題樣本資料計算出$\mu_1-\mu_2$的信賴區間為

$$(500-600)\pm 2.575\sqrt{\frac{225}{100}+\frac{900}{121}}$$

或

$$[-109.53 \quad , \quad -90.48]$$

10.9 自兩住宅區內隨機取樣 500 人及 600 人，其中分別有 25 人及 21 人為 60 歲以上的獨居老人

(1)估計兩住宅區內獨居老年人口比例差的 95%信賴區間。

(2)估計兩住宅區內獨居老年人口比例差的 99%信賴區間。

解：

(1)$1-\alpha=0.95$，$Z_{0.025}=1.96$，所以p_1-p_2的 95%信賴區間為

$$(\hat{p}_1-\hat{p}_2)\pm 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

根據本題樣本資料$\hat{p}_1=\dfrac{25}{500}=0.05$，$\hat{p}_2=\dfrac{21}{600}=0.035$，計算出$p_1-p_2$的 95%信賴區間為

$$(0.05-0.035)\pm 1.96\sqrt{\frac{(0.05)(0.95)}{500}+\frac{(0.035)(0.965)}{600}}$$

或

$$〔-0.009\quad,\quad 0.0391〕$$

(2)同理，$1-\alpha=0.99$，$Z_{0.005}=2.575$，所以p_1-p_2的 99%信賴區間為

$$(\hat{p}_1-\hat{p}_2)\pm 2.575\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

根據本題樣本資料計算出p_1-p_2的 99%信賴區間為

$$(0.05-0.035)\pm 2.575\sqrt{\frac{(0.05)(0.95)}{500}+\frac{(0.035)(0.965)}{600}}$$

或

$$〔-0.017\quad,\quad 0.047〕$$

10.10 隨機抽樣 1000 位男生及 1200 位女生，其中 125 位及 120 位贊成廢除死刑

(1)估計男女性贊成廢除死刑的比例差之 95%信賴區間。

(2)估計男女性贊成廢除死刑的比例差之 99%信賴區間。

解：

(1)$1-\alpha=0.95$，$Z_{0.025}=1.96$，所以p_1-p_2的 95%信賴區間為

$$(\hat{p}_1-\hat{p}_2)\pm 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

根據本題樣本資料 $\hat{p}_1=\dfrac{125}{1000}=0.125$，$\hat{p}_2=\dfrac{120}{1200}=0.1$，計算出$p_1-p_2$的 95%信賴區間為

$$(0.125-0.1)\pm 1.96\sqrt{\frac{(0.125)(0.875)}{1000}+\frac{(0.1)(0.9)}{1200}}$$

或

〔-0.002 , 0.052〕

⑵同理，$Z_{0.005}=2.575$，所以 p_1-p_2 的 99%信賴區間為

$$(\hat{p}_1-\hat{p}_2)\pm 2.575\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

根據本題樣本資料計算出p_1-p_2的 99%信賴區間為

$$(0.125-0.1)\pm 2.575\sqrt{\frac{(0.125)(0.875)}{1000}+\frac{(0.1)(0.9)}{1200}}$$

或

〔-0.01 , 0.06〕

10.11 計算

⑴$F_{0.05}(4,8)=$?

⑵ $F_{0.01}(2,12)=$?

⑶ $F_{0.975}(3,9)=$?

⑷ $P\left(F_{0.97}(6,15)\le F(6,15)\le F_{0.06}(6,15)\right)=$?

解：

⑴ $F_{0.05}(4,8)=3.8378$

⑵$F_{0.01}(2,12)=6.9266$

⑶$F_{0.975}(3,9)=\dfrac{1}{F_{0.025}(9,3)}$

$=\dfrac{1}{14.473}$

$=0.0691$

⑷ $P\left(F_{0.97}(6,15)\le F(6,15)\le F_{0.06}(6,15)\right)=0.97-0.06=0.91$

10.12 抽樣調查國人30-40歲及40-50歲兩個年齡層人口中，每年的旅遊支出金額如下，假設旅遊支出為常態分配，估計這兩個年齡層旅遊支出變異數比值的98%信賴區間。

40-50歲	28,000	50,000	60,000	75,000	90,000	
30-40歲	12,000	21,000	15,000	18,000	22,000	32,000

解：

$1-\alpha=0.98$，$n_1=5$，$n_2=6$，$F_{0.01}(4,5)=11.4$，$F_{0.99}(4,5)=\dfrac{1}{15.5}=0.065$所以$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的98%信賴區間為

$$\left[\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\right)\left(\frac{1}{11.4}\right)\quad,\quad\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\right)\left(\frac{1}{0.065}\right)\right]$$

根據本題樣本資料$S_1^2=561{,}800{,}000$，$S_2^2=48{,}400{,}000$，所以40-50歲年齡層與30-40歲年齡層旅遊支出變異數比值$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的98%信賴區間為

$$\left[\left(\frac{561{,}800{,}000}{48{,}400{,}000}\right)\left(\frac{1}{11.4}\right)\quad,\quad\left(\frac{561{,}800{,}000}{48{,}400{,}000}\right)\left(\frac{1}{0.065}\right)\right]$$

或

$$[1.018\quad,\quad 178.57]$$

10.13 隨機抽樣調查國小五六年級男女生每週看電視的時數，數據記錄如下：

女生	16	10	17	11	5	
男生	14	11	5	9	7	8

假設國小學生收看電視時間為常態分配，估計男女生看電視時間標準差比值的98%信賴區間。

解：

$1-\alpha=0.98$，$n_1=5$，$n_2=6$，$F_{0.01}(4,5)=11.4$，$F_{0.99}(4,5)=\dfrac{1}{15.5}=0.065$所以$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的

98%信賴區間為

$$\left[\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\right)\left(\frac{1}{11.4}\right) \quad , \quad \left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\right)\left(\frac{1}{0.065}\right)\right]$$

根據本題樣本資料$S_1^2=23.7$，$S_2^2=10$。所以女生與男生看電視時間的變異數比值之 98%信賴區間為

$$\left[\left(\frac{23.7}{10}\right)\left(\frac{1}{11.4}\right),\left(\frac{23.7}{10}\right)\left(\frac{1}{0.065}\right)\right]$$

或

$$〔0.201 \quad , \quad 36.46〕$$

所以其標準差比值的 98%信賴區間為

$$〔\sqrt{0.201}, \sqrt{36.46}〕$$
$$=〔0.45, 6.05〕$$