第 9 章

估計㈠

定義 *9-0-1*：估計量（estimator）

欲估計母群體的某一參數θ時，我們從該母群體中抽取 n 個樣本值$x_1, \cdots, x_n$。若以樣本統計量$\hat{\theta}$來估計θ，且定義$\hat{\theta}$為

$$\hat{\theta}=f(x_1, \cdots, x_n)$$

則我們稱$\hat{\theta}$為θ的估計量。

定義 *9-0-2*：估計值（estimate）

將一組樣本值代入估計量所求得的數值，稱為估計值。

定義 *9-0-3*：不偏統計量（unbiased statistic）

統計量$\hat{\theta}$作為母群體參數θ的估計量，若$E(\hat{\theta})=\theta$時，則我們稱$\hat{\theta}$為θ的不偏估計量，否則便為偏差估計量（biased estimator）。

定義 *9-0-4*：標準常態右尾Z_α值

Z為標準常態隨機變數，α為一個介於 0、1 之間的數字，則必存在一個 z 值，它使得$Z \geq z$的機率為α，為了操作方便，我們以符號Z_α表示這個 z 值也就是

$$P(Z \geq Z_\alpha)=\alpha$$

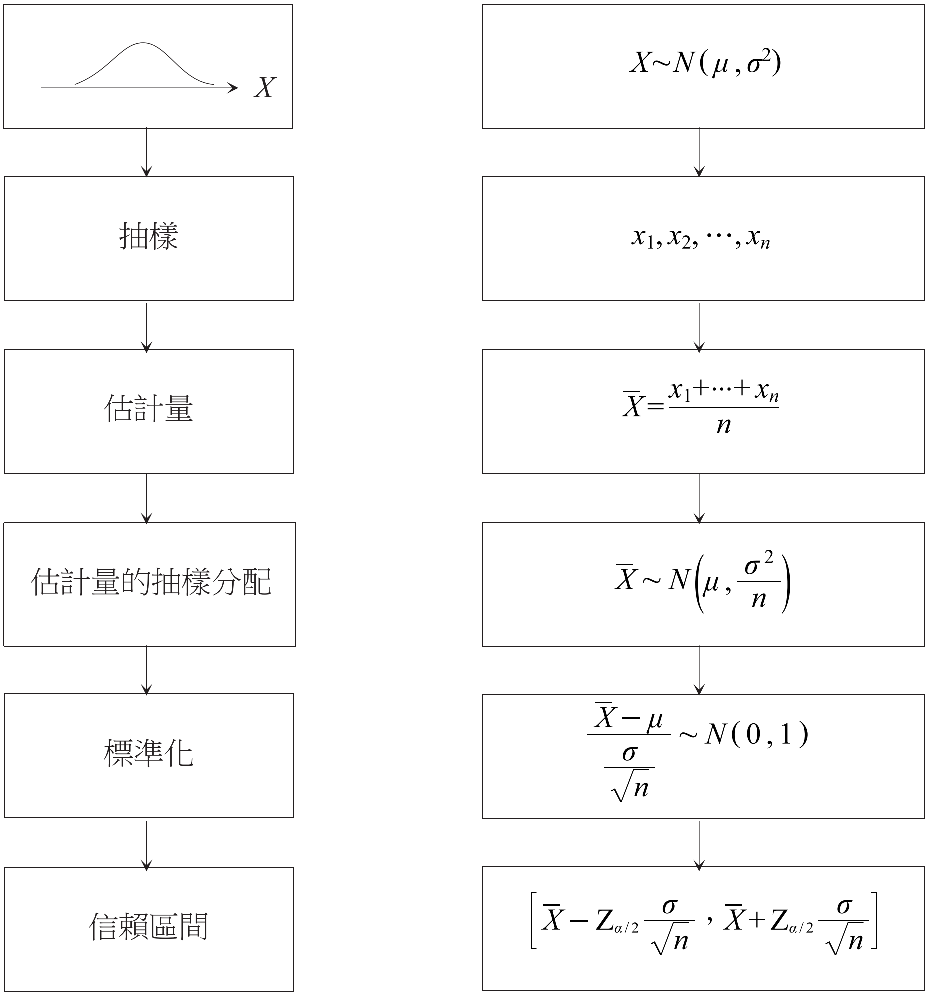

圖 9-1-1　常態母群體，變異數已知下 μ 的估計程序

定義 *9-1-1*：信賴水準（level of confidence）

區間估計所求得的隨機區間（random interval），會包含所欲估計之母群體參數的機率稱之為信賴水準。

定理 *9-1-1*：μ 的信賴區間（confidence interval）

X 為常態母群體之隨機變數，當變異數 σ^2 已知時，$\overline{X}$ 為抽樣自這個母群

體的n個樣本值$x_1,\cdots,x_n$的樣本平均數，則其母群體平均數μ的$100(1-\alpha)\%$信賴區間為

$$[\overline{X}-Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}+Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

定義 *9-1-2*：左限信賴區間（left-side confidence interval）

區間估計所求得的隨機區間型態為[LCL,∞)，且該區間會包含所欲估計之母群體參數的機率為 $1-\alpha$，則我們稱這個區間為$100(1-\alpha)\%$左限信賴區間，其中 LCL（lower confidence limit）為該區間的下限值。

定義 *9-1-3*：右限信賴區間（right-side confidence interval）

區間估計所求得的隨機區間型態為(−∞,UCL]，且該區間會包含所欲估計之母群體參數的機率為 $1-\alpha$，則我們稱這個區間為$100(1-\alpha)\%$右限信賴區間，其中 UCL（upper confidence limit）為該區間的上限值。

定理 *9-1-2*：μ的右限信賴區間

X為常態母群體之隨機變數，當變異數σ^2為已知時，其母群體平均數μ的$100(1-\alpha)\%$右限信賴區間為

$$(-\infty, \overline{X}+Z_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

其中，$\overline{X}$為抽樣自這個母群體的 n 個樣本值$x_1,\cdots,x_n$的樣本平均數。

定理 *9-1-3*：μ的左限信賴區間

X為常態母群體之隨機變數，當變異數σ^2為已知時，其母群體平均數μ的$100(1-\alpha)\%$左限信賴區間為

$$[\overline{X}-Z_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty)$$

其中，$\overline{X}$為抽樣自這個母群體的 n 個樣本值$x_1,\cdots,x_n$的樣本平均數。

信賴區間的意義：

當我們說 μ 的 95%信賴區間為 $\left[\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ 它所代表的意義是，當我們多次執行抽樣時，所產生的眾多上述信賴區間（或隨機區間），其中有 95%會包含所欲估計的 μ。

定理 *9-2-1*：*t* 分配（t distribution）

母群體隨機變數 X 為期望值 μ，變異數 σ^2 的常態分配，也就是 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$x_1,\cdots,x_n$ 為抽樣自這個母群體的 n 個隨機樣本，當 σ^2 未知時，我們以樣本變異數 S^2 替代，則

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}=t\sim t(n-1)$$

是自由度（degrees of freedom）為 $n-1$ 的 t 分配，以符號 $t(n-1)$ 表示之

定義 *9-2-1*：$t_\alpha(\mathrm{n}-1)$ 值

$t(n-1)$ 為自由度 $(n-1)$ 的 t 隨機變數，我們定義 $t_\alpha(n-1)$ 為滿足下式之 $t(n-1)$ 軸上的數值

$$P(t(n-1)>t_\alpha(n-1))=\alpha$$

定理 *9-3-1*：μ 的信賴區間

X 為常態母群體之隨機變數，當變異數 σ^2 未知時，$\overline{X}$ 為抽樣自這個母群體的 n 個樣本值 $x_1,\cdots,x_n$ 的樣本平均數，則母群體平均數 μ 的 $100(1-\alpha)$%信賴區間為

$$[\overline{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}]$$

其中 S 為樣本標準差。

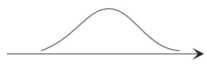 X	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$
抽樣	$x_1, x_2, \cdots, x_n$
估計量	$\overline{X} = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ $S^2 = \dfrac{\Sigma (x_i - \overline{X})^2}{n-1}$
估計量的抽樣分配	$\overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$
標準化	$\dfrac{\overline{X} - \mu}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$
信賴區間	$\left[\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}\right]$

圖 9-3-1　常態母群體，變異數未知下 μ 的估計程序

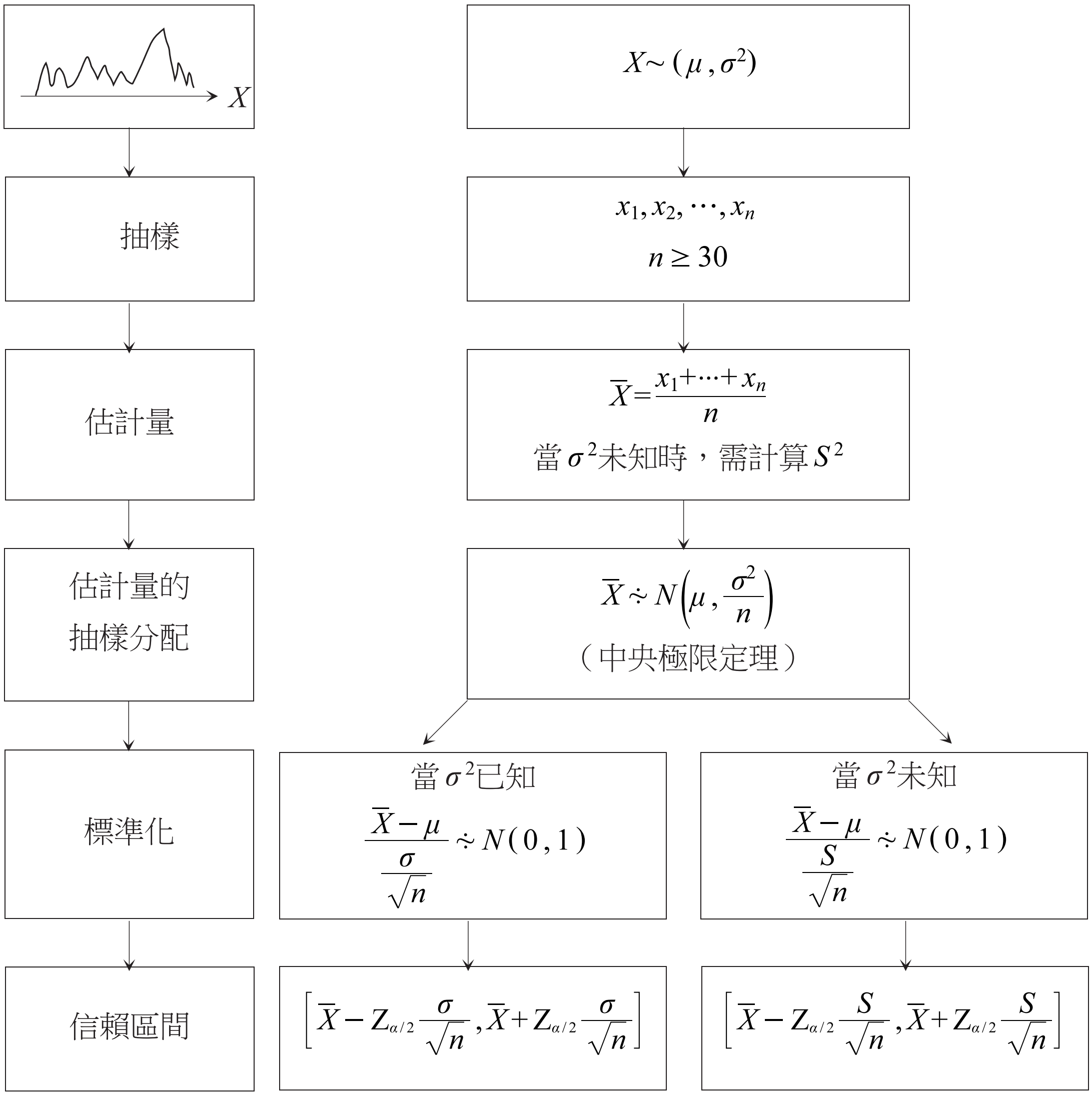

圖 9-4-1　非常態母群體μ的估計程序

定理 *9-4-1*： μ的信賴區間

X為非常態母群體之隨機變數，$\overline{X}$為抽樣自這個母群體的 n 個樣本值 $x_1, \cdots, x_n$ 的樣本平均數且 $n \geq 30$，則母群體平均數μ的$100(1-\alpha)\%$信賴區間為

⑴當母群體變異數σ^2已知時

$$\left[\bar{X}-Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}+Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

⑵當母群體變異數σ^2未知時

$$\left[\bar{X}-Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X}+Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

其中S為樣本標準差。

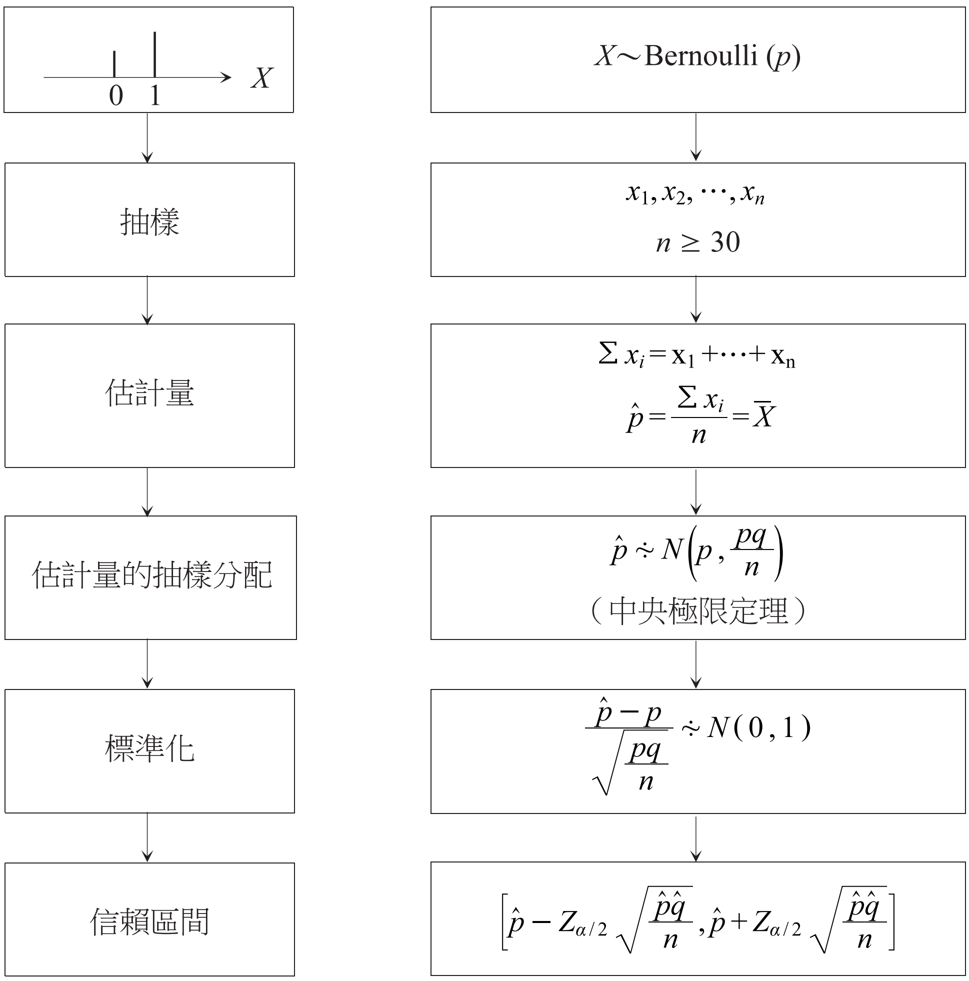

圖 9-5-1　母群體比例p的估計程序

定理 *9-5-1*：母群體比例 p 的信賴區間

X 為區分母群體中元素是否具有某種特質之 Bernoulli 隨機變數，$x_1, \cdots, x_n$ 為抽樣自這個母群體的 n 個（0 或 1）樣本值，$\hat{p} = \frac{\Sigma x_i}{n}$ 為具有該特質的樣本比例值，則母群體中具有該特質元素的比例值 p 的 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間為

$$[\hat{p} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}]$$

其中 $\hat{q} = 1 - \hat{p}$

定理 *9-6-1*：卡方分配（χ^2 distribution or chi-square distribution）

X 為常態分配母群體之隨機變數，其平均數及變異數分別為 μ 及 σ^2。也就是 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$\bar{X}$ 為抽樣自這個母群體的 n 個樣本值 $x_1, \cdots, x_n$ 的樣本平均數，則樣本統計量

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 = \chi^2 \sim \chi^2(n-1)$$

是自由度（degrees of freedom）為 $n-1$ 的卡方分配，以符號 $\chi^2(n-1)$ 表示之。特別注意的是整個 χ^2 是一個符號，它並不是 χ 的平方。

定義 *9-6-1*：$\chi^2_\alpha(v)$ 值

$\chi^2(v)$ 為自由度 (v) 的 χ^2 隨機變數，我們定義 $\chi^2_\alpha(v)$ 為滿足下式之 $\chi^2(v)$ 軸上的數值。

$$P(\chi^2(v) > \chi^2_\alpha(v)) = \alpha$$

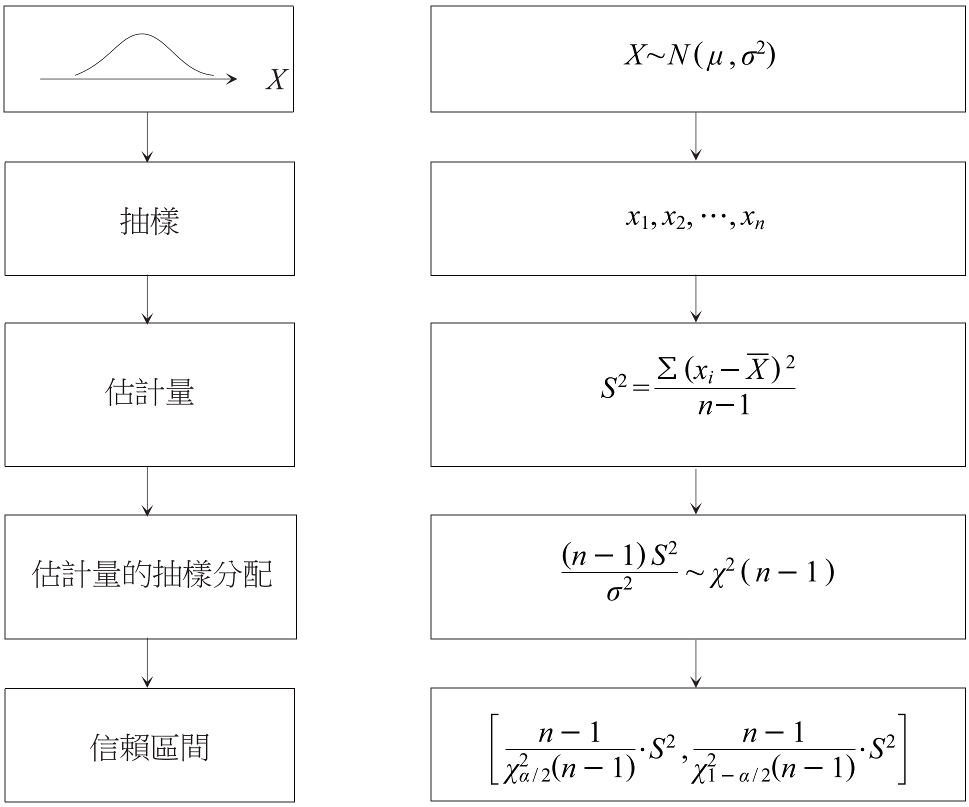

圖 9-7-1　母群體變異數 σ^2 的估計程序

定理 *9-7-1*：σ^2 的信賴區間

X 為常態母群體之隨機變數，S^2 為抽樣自這個母群體的 n 個樣本值 $x_1, \cdots, x_n$ 的樣本變異數，則其母群體 σ^2 的 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間為

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right]$$

定理 *9-8-1*：常態母群體 σ^2 已知下樣本數的決定

當母群體為常態母群體，且其變異數 σ^2 已知時，欲獲得母群體平均數的 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間，且區間寬度不超過 D 時，我們從這個母群體

抽取隨機樣本的樣本數 n 為

$$n > \frac{4\left(Z_{\alpha/2}\,\sigma\right)^2}{D^2}$$

二階段法決定樣本數：

(1)階段 1：自母群體抽取 n_p 個先期樣本（例如 $n=30$），計算這 n_p 個樣本的樣本變異數 S^2

(2)階段 2：將階段 1 所得到的 S^2 替代定理 9-8-1 中未知的 σ^2，計算出所需的樣本數 n。若 $n>n_p$ 則我們需從母群體中再補抽樣 $(n-n_p)$ 個樣本，若 $n<n_p$ 則不需再補抽樣。

定理 *9-8-2*：估計母群體比例值 p 時的樣本數

估計母群體具有某特質元素所佔比例 p 時，欲使 p 的 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間寬度不超過 D，則我們從這個母群體抽取的樣本數 n 為

$$n > \frac{4\left(Z_{\alpha/2}\,\hat{p}\hat{q}\right)^2}{D^2}$$

其中 $\hat{p},\hat{q}$ 為引用二階段法中階段 1 所估計得到的樣本比例值。

定理 *9-8-3*：估計母群體比例 p 時的樣本數

估計母群體具有某特質元素所佔比例 p 時，欲使 p 的 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間寬度不超過 D，則最保守的樣本數 n 為

$$n > \frac{Z_{\alpha/2}^2}{D^2}$$

9.1 查表計算

(1)$Z_{0.05}=?$

(2)$Z_{0.01}=?$

(3)$Z_{0.005}=?$

(4)$P(Z_{0.93}<Z<Z_{0.05})=?$

(5)$P(Z_{0.85}<Z)=?$

解：

(1)$Z_{0.0505}=1.64$，$Z_{0.0495}=1.65$，用內插法求得$Z_{0.05}=1.645$

(2)$Z_{0.0102}=2.32$，$Z_{0.0099}=2.33$，用內插法求得$Z_{0.01}=2.327$

(3)$Z_{0.0051}=2.57$，$Z_{0.0049}=2.58$，用內插法求得$Z_{0.005}=2.575$

(4)$P(Z_{0.93}<Z<Z_{0.05})=0.93-0.05=0.88$

(5)$P(Z_{0.85}<Z)=0.85$

9.2 $X\sim N(\mu,22)$，隨機抽樣 10 個樣本資料 36,27,32,26,25,24,31,22,33,34

(1)估計母群體平均數μ的 95%信賴區間。

(2)估計母群體平均數μ的 99%信賴區間。

解：

(1)$1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$，$\frac{\alpha}{2}=0.025$，$Z_{0.025}=1.96$。所以μ的 95%信賴區間為

$$\left(\overline{X}-1.96\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{10}}\quad,\quad\overline{X}+1.96\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{10}}\right)$$

根據本題樣本資料計算得到$\overline{X}=29$，代入上式，我們得到的信賴區間為

$$\left(29-1.96\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{10}}\quad,\quad29+1.96\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{10}}\right)$$
$$=〔26.093\quad,\quad31.907〕$$

(2)$1-\alpha=0.99$，$\alpha=0.01$，$\frac{\alpha}{2}=0.005$，$Z_{0.005}=3.27$，所以μ的 99%信賴區間為

$$\left(\overline{X}-3.27\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{10}}\quad,\quad\overline{X}+3.27\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{10}}\right)$$

根據本題樣本資料所得到的信賴區間為

$$\left(29-3.27\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{10}}\quad,\quad 29+3.27\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{10}}\right)$$
$$=〔24.15\quad,\quad 33.85〕$$

9.3 隨機抽樣 8 筆健保醫療給付費用為 614 , 665 , 836 , 622 , 506 , 568 , 580 , 545。假設健保醫療給付為常態分配，且其標準差為 100 元

⑴估計健保支付每人次醫療費用平均值的 95%信賴區間。

⑵估計健保支付每人次醫療費用平均值的 99%信賴區間。

解：

⑴$1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$，$\frac{\alpha}{2}=0.025$，$Z_{0.025}=1.96$。所以μ的 95%信賴區間為

$$\left(\overline{X}-1.96\frac{100}{\sqrt{8}}\quad,\quad \overline{X}+1.96\frac{100}{\sqrt{8}}\right)$$

根據本題樣本資料計算得到$\overline{X}=617$，代入上式，我們得到的信賴區間為

$$\left(617-1.96\frac{100}{\sqrt{8}}\quad,\quad 617+1.96\frac{100}{\sqrt{8}}\right)$$
$$=〔547.703\quad,\quad 686.297〕$$

⑵$1-\alpha=0.99$，$\alpha=0.01$，$\frac{\alpha}{2}=0.005$，$Z_{0.005}=3.27$。所以μ的 99%信賴區間為

$$\left(\overline{X}-3.27\frac{100}{\sqrt{8}}\quad,\quad \overline{X}+3.27\frac{100}{\sqrt{8}}\right)$$

根據本題樣本資料計算得到的信賴區間為

$$\left(617-3.27\frac{100}{\sqrt{8}}\quad,\quad 617+3.27\frac{100}{\sqrt{8}}\right)$$
$$=〔501.39\quad,\quad 732.61〕$$

9.4 同上題計算

(1)健保支付每人次醫療費用平均值的 95%左限信賴區間。

(2)健保支付每人次醫療費用平均值的 95%右限信賴區間。

解：

(1)$1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$，$Z_{0.05}=1.645$。所以μ的 95%左限信賴區間為

$$\left(\overline{X}-1.645\frac{100}{\sqrt{8}},\infty\right)$$

根據本題樣本資料計算得到的信賴區間為

$$\left(617-1.645\frac{100}{\sqrt{8}},\infty\right)$$
$$=〔558.84,\infty）$$

(2)$1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$，$Z_{0.05}=1.645$。所以μ的 95%右限信賴區間為

$$\left(-\infty,\overline{X}+1.645\frac{100}{\sqrt{8}}\right)$$

根據本題樣本資料計算得到的區間為

$$\left(-\infty,617+1.645\frac{100}{\sqrt{8}}\right)$$
$$=（-\infty,672.16〕$$

9.5 查表計算

(1)$t_{0.05}(16)=$？

(2)$t_{0.025}(19)=$？

(3)$t_{0.975}(14)=$？

(4)$P\left(t_{0.87}(13)<t(13)<t_{0.05}(13)\right)=$？

(5)$P\left(t_{0.85}(12)<t(12)\right)=$？

解：

(1) $t_{0.05}(16)=1.746$

⑵ $t_{0.025}(19)=2.093$

⑶ $t_{0.975}(14)=-t_{0.025}(14)=-2.145$

⑷ $P\left(t_{0.87}(13)<t(13)<t_{0.05}(13)\right)$

$=0.87-0.05$

$=0.82$

⑸ $P\left(t_{0.85}(12)<t(12)\right)=0.85$

9.6 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$且σ^2未知。抽樣自這個母群體的 10 個隨機樣本為 3,7,5,13,16,12,17,8,11,14。

⑴估計μ的 95%信賴區間。

⑵估計μ的 99%信賴區間。

解：

⑴ $1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$，$\frac{\alpha}{2}=0.025$，$t_{0.025}(9)=2.262$。所以μ的 95%信賴區間為

$$\left(\overline{X}-2.262\frac{S}{\sqrt{10}}\quad,\quad\overline{X}+2.262\frac{S}{\sqrt{10}}\right)$$

根據本題樣本資料$\overline{X}=12$，$S=4$，計算μ的 95%信賴區間為

$$\left(12-2.262\frac{4}{\sqrt{10}}\quad,\quad 12+2.262\frac{4}{\sqrt{10}}\right)$$
$$=〔9.139\quad,\quad 14.861〕$$

⑵ $1-\alpha=0.99$，$\alpha=0.01$，$\frac{\alpha}{2}=0.005$，$t_{0.005}(9)=3.25$。所以μ的 99%信賴區間為

$$\left(\overline{X}-3.25\frac{S}{\sqrt{10}}\quad,\quad\overline{X}+3.25\frac{S}{\sqrt{10}}\right)$$

根據本題樣本資料計算μ的 99%信賴區間為

$$\left(12-3.25\frac{4}{\sqrt{10}}\quad,\quad 12+3.25\frac{4}{\sqrt{10}}\right)$$
$$=〔7.889,16.111〕$$

9.7 環保局欲評估某地區每日清運垃圾的平均量，隨機抽樣 8 天並記錄當天的垃圾總量（單位：公噸）為 2410, 2350, 2520, 2580, 2480, 2510, 2490, 2540，假設垃圾量為常態分配。

(1)估計每日垃圾的平均值的 95%信賴區間。

(2)估計每日垃圾的平均值的 99%信賴區間。

解：

(1) $1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$，$\frac{\alpha}{2}=0.025$，$t_{0.025}(7)=2.365$。所以每日垃圾平均值的 95%信賴區間為

$$\left(\bar{X}-2.365\frac{S}{\sqrt{8}} \quad , \quad \bar{X}+2.365\frac{S}{\sqrt{8}}\right)$$

根據本題樣本資料 $\bar{X}=2485$，$S=73.485$，代入上式得到 95%信賴區間為

$$\left(2485-2.365\frac{73.485}{\sqrt{8}} \quad , \quad 2485+2.365\frac{73.485}{\sqrt{8}}\right)$$
$$=〔2423 \quad , \quad 2546〕$$

(2) $1-\alpha=0.99$，$\alpha=0.01$，$\frac{\alpha}{2}=0.005$，$t_{0.005}(7)=3.5$。所以每日垃圾平均值的 99%信賴區間為

$$\left(\bar{X}-3.5\frac{S}{\sqrt{8}} \quad , \quad \bar{X}+3.5\frac{S}{\sqrt{8}}\right)$$

根據本題樣本資料計算得到的信賴區間為

$$\left(2485-3.5\frac{73.485}{\sqrt{8}} \quad , \quad 2485+3.5\frac{73.485}{\sqrt{8}}\right)$$
$$=〔2576 \quad , \quad 2394〕$$

9.8 隨機抽樣並記錄 10 通國際電話的通話時間（單位：秒）為 210, 620, 860, 1120, 1810, 940, 730, 1190, 1070, 320。假設每通電話通話時間為常態分配。

(1)估計每通國際電話平均時間的 95%信賴區間。

⑵估計每通國際電話平均時間的 99%信賴區間。

解：

⑴$1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$，$\frac{\alpha}{2}=0.025$，$t_{0.025}(9)=2.262$。所以μ 的 95%信賴區間為

$$\left(\overline{X}-2.262\frac{S}{\sqrt{10}} \quad , \quad \overline{X}+2.262\frac{S}{\sqrt{10}}\right)$$

根據本題樣本資料$\overline{X}=887$，$S=460.77$。代入上式計算得到的信賴區間為

$$\left(887-2.262\frac{460.77}{\sqrt{10}} \quad , \quad 887+2.262\frac{460.77}{\sqrt{10}}\right)$$
$$=〔557.41 \quad , \quad 1216.6〕$$

⑵$1-\alpha=0.99$，$\alpha=0.01$，$\frac{\alpha}{2}=0.005$，$t_{0.005}(9)=3.25$。所以μ的 99%信賴區間為

$$\left(\overline{X}-3.25\frac{S}{\sqrt{10}} \quad , \quad \overline{X}+3.25\frac{S}{\sqrt{10}}\right)$$

根據本題樣本資料計算得到的 99%信賴區間為

$$\left(887-3.25\frac{460.77}{\sqrt{10}} \quad , \quad 887+3.25\frac{460.77}{\sqrt{10}}\right)$$
$$=〔413.45 \quad , \quad 1360.56〕$$

9.9 隨機樣本$n=64$，$\overline{X}=30$，$S=16$則

⑴估計母群體平均數μ的 95%信賴區間。

⑵估計母群體平均數μ的 99%信賴區間。

解：

⑴$1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$，$\frac{\alpha}{2}=0.025$，$Z_{0.025}=1.96$。所以μ 的 95%信賴區間為

$$\left(\overline{X}-1.96\frac{S}{\sqrt{n}} \quad , \quad \overline{X}+1.96\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

根據本題樣本資料計算得到的信賴區間為

$$\left[30-1.96\frac{16}{\sqrt{64}}\quad,\quad 30+1.96\frac{16}{\sqrt{64}}\right]$$
$$=〔26.08\quad,\quad 33.92〕$$

(2) $1-\alpha=0.99$，$\alpha=0.01$，$\frac{\alpha}{2}=0.005$，$Z_{0.005}=2.576$。所以 μ 的 99%信賴區間為

$$\left[\overline{X}-2.576\frac{S}{\sqrt{n}}\quad,\quad \overline{X}+2.576\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

根據本題樣本資料計算得到的信賴區間為

$$\left[30-2.576\frac{16}{\sqrt{64}}\quad,\quad 30+2.576\frac{16}{\sqrt{64}}\right]$$
$$=〔24.84\quad,\quad 35.15〕$$

9.10 隨機抽取都會區 81 個家庭，記錄他們的居住空間（單位：坪）其平均值為 26，標準差為 4

(1)估計每個家庭居住空間平均值的 95%信賴區間。

(2)估計每個家庭居住空間平均值的 99%信賴區間。

解：

(1) $1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$，$\frac{\alpha}{2}=0.025$，$Z_{0.025}=1.96$。所以每個家庭平均居住空間的 95%信賴區間為

$$\left[\overline{X}-1.96\frac{S}{\sqrt{n}}\quad,\quad \overline{X}+1.96\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

根據本題樣本資料計算得到的信賴區間為

$$\left[26-1.96\frac{4}{\sqrt{81}}\quad,\quad 26+1.96\frac{4}{\sqrt{81}}\right]$$
$$=〔25.02\quad,\quad 26.98〕$$

(2) $1-\alpha=0.99$，$\alpha=0.01$，$\frac{\alpha}{2}=0.005$，$Z_{0.005}=2.576$。所以每個家庭平均居住空

間的 99%信賴區間為

$$\left(\overline{X}-2.576\frac{S}{\sqrt{n}} \quad , \quad \overline{X}+2.576\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

根據本題樣本資料計算得到的信賴區間為

$$\left(26-2.576\frac{4}{\sqrt{81}} \quad , \quad 26+2.576\frac{4}{\sqrt{81}}\right)$$
$$=〔24.71 \quad , \quad 27.28〕$$

9.11 隨機抽樣 1200 戶，其中有 620 戶擁有汽車

⑴估計汽車普及率的 95%信賴區間。

⑵估計汽車普及率的 99%信賴區間。

解：

⑴$1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$，$\frac{\alpha}{2}=0.025$，$Z_{0.025}=1.96$。所以汽車普及率的 95%信賴區間為

$$\left(\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \quad , \quad \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$$

根據本題樣本資料$\hat{p}=0.517$，代入上式計算得到汽車普及率的95%信賴區間為

$$\left(0.517-1.96\sqrt{\frac{(0.517)(0.483)}{1200}} \quad , \quad 0.517+1.96\sqrt{\frac{(0.517)(0.483)}{1200}}\right)$$
$$=〔0.488 \quad , \quad 0.545〕$$

⑵$1-\alpha=0.99$，$\alpha=0.01$，$\frac{\alpha}{2}=0.005$，$Z_{0.005}=2.576$。所以汽車普及率的 99%信賴區間為

$$\left(\hat{p}-2.576\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \quad , \quad \hat{p}+2.576\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$$

根據本題樣本資料計算得到的汽車普及率 99%信賴區間為

$$\left(0.517-2.576\sqrt{\frac{(0.517)(0.483)}{1200}}\quad,\quad 0.517+2.576\sqrt{\frac{(0.517)(0.483)}{1200}}\right)$$
$$=〔0.48\quad,\quad 0.554〕$$

9.12 隨機抽樣 500 位某大學應屆畢業生，其中有 120 位繼續念研究所。

⑴估計該校同學研究所升學率的 95%信賴區間。

⑵估計該校同學研究所升學率的 99%信賴區間。

解：

⑴$1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$，$\frac{\alpha}{2}=0.025$，$Z_{0.025}=1.96$。所以該校研究所升學率的 95%信賴區間為

$$\left(\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\quad,\quad \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$$

根據本題樣本資料$\hat{p}=\frac{120}{500}=0.24$，代入上式計算得到的信賴區間為

$$\left(0.24-1.96\sqrt{\frac{(0.24)(0.76)}{500}}\quad,\quad 0.24+1.96\sqrt{\frac{(0.24)(0.76)}{500}}\right)$$
$$=〔0.203\quad,\quad 0.277〕$$

⑵$1-\alpha=0.99$，$\alpha=0.01$，$\frac{\alpha}{2}=0.005$，$Z_{0.005}=2.576$。所以該校研究所升學率的 99%信賴區間為

$$\left(\hat{p}-2.576\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\quad,\quad \hat{p}+2.576\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$$

根據本題樣本資料計算得到的研究所升學率 99%信賴區間為

$$\left(0.24-2.576\sqrt{\frac{(0.24)(0.76)}{500}}\quad,\quad 0.24+2.576\sqrt{\frac{(0.24)(0.76)}{500}}\right)$$
$$=〔0.19\quad,\quad 0.289〕$$

9.13 欲估計國人十大死因中惡性腫瘤所佔的百分比，隨機抽樣1500個死亡病歷中有670位死於惡性腫瘤。

⑴估計國人因惡性腫瘤死亡之比例的95%信賴區間。

⑵估計國人因惡性腫瘤死亡之比例的99%信賴區間。

解：

⑴$1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$，$\dfrac{\alpha}{2}=0.025$，$Z_{0.025}=1.96$。所以國人因惡性腫瘤死亡之比例的95%信賴區間為

$$\left(\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\quad,\quad \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$$

根據本題樣本資料$\hat{p}=\dfrac{670}{1,500}=0.447$，代入上式計算得到國人十大死因中惡性腫瘤所佔比例的95%信賴區間為

$$\left(0.447-1.96\sqrt{\frac{(0.447)(0.553)}{1500}}\quad,\quad 0.447+1.96\sqrt{\frac{(0.447)(0.553)}{1500}}\right)$$
$$=〔0.422\quad,\quad 0.472〕$$

⑵$1-\alpha=0.99$，$\alpha=0.01$，$\dfrac{\alpha}{2}=0.005$，$Z_{0.005}=2.576$。所以國人因惡性腫瘤死亡所佔比例的99%信賴區間為

$$\left(\hat{p}-2.576\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\quad,\quad \hat{p}+2.576\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$$

根據本題樣本資料計算得到的信賴區間為

$$\left(0.447-2.576\sqrt{\frac{(0.447)(0.553)}{1500}}\quad,\quad 0.447+2.576\sqrt{\frac{(0.447)(0.553)}{1500}}\right)$$
$$=〔0.414\quad,\quad 0.479〕$$

9.14 計算

⑴$\chi^2_{0.05}(16)=$？

⑵$\chi^2_{0.025}(18)=$？

(3)$\chi^2_{0.975}(15)=$？

(4)$P\left(\chi^2_{0.81}(11)<\chi^2(11)<\chi^2_{0.03}(11)\right)=$?

(5)$P\left(\chi^2_{0.19}(13)<\chi^2(13)\right)=$？

解：

(1)$\chi^2_{0.05}(16)=26.30$

(2)$\chi^2_{0.025}(18)=28.87$

(3)$\chi^2_{0.975}(15)=6.2621$

(4)$P\left(\chi^2_{0.81}(11)<\chi^2(11)<\chi^2_{0.03}(11)\right)=0.81-0.03=0.78$

(5)$P\left(\chi^2_{0.19}(13)<\chi^2(13)\right)=0.19$

9.15 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，隨機抽取 7 個樣本為 4,9,6,8,7,13,11

(1)估計σ^2的 95%信賴區間。

(2)估計σ^2的 99%信賴區間。

解：

(1)$1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$，$\dfrac{\alpha}{2}=0.025$，$\chi^2_{0.025}(6)=14.449$，$\chi^2_{0.975}(6)=1.237$。所以σ^2的 95%信賴區間為

$$\left(\frac{6S^2}{14.449}\ ,\ \frac{6S^2}{1.237}\right)$$

根據本題樣本資料$S^2=9.238$，代入上式計算得到σ^2的 95%信賴區間為

$$\left(\frac{6(9.238)}{14.449}\ ,\ \frac{6(9.238)}{1.237}\right)$$
$$=〔3.83\ ,\ 44.79〕$$

(2)$1-\alpha=0.99$，$\alpha=0.01$，$\dfrac{\alpha}{2}=0.005$，$\chi^2_{0.005}(6)=18.548$，$\chi^2_{0.995}(6)=0.676$。所以σ^2的 99%信賴區間為

$$\left(\frac{6S^2}{18.548}\ ,\ \frac{6S^2}{0.676}\right)$$

根據本題樣本資料計算得到的信賴區間為

$$\left(\frac{6(9.238)}{18.548}\ ,\ \frac{6(9.238)}{0.676}\right)$$
$$=〔2.98\ ,\ 82.02〕$$

9.16 同本章第 8 題

(1)估計每通國際電話通話時間變異數 σ^2 的 95%信賴區間。

(2)估計每通國際電話通話時間變異數 σ^2 的 99%信賴區間。

解：

(1) $1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$，$\frac{\alpha}{2}=0.025$，$\chi^2_{0.025}(9)=19.02$，$\chi^2_{0.975}(9)=2.7$。所以 σ^2 的 95%信賴區間為

$$\left(\frac{9S^2}{19.02}\ ,\ \frac{9S^2}{2.7}\right)$$

根據本題樣本資料 $S^2=212312$，代入上式計算得到 σ^2 的 95%信賴區間為

$$\left(\frac{9(212312)}{19.02}\ ,\ \frac{9(212312)}{2.7}\right)$$
$$=〔100448\ ,\ 707605〕$$

(2) $1-\alpha=0.99$，$\alpha=0.01$，$\frac{\alpha}{2}=0.005$，$\chi^2_{0.005}(9)=23.59$，$\chi^2_{0.995}(9)=1.74$。所以 σ^2 的 99%信賴區間為

$$\left(\frac{9S^2}{23.59}\ ,\ \frac{9S^2}{1.74}\right)$$

根據本題樣本資料計算得到的信賴區間為

$$\left(\frac{9(212312)}{23.59}\ ,\ \frac{9(212312)}{1.74}\right)$$
$$=〔81003\ ,\ 1101387〕$$