第 7 章

幾個常用的隨機變數及其機率分配

定義 *7-1-1*：伯努力試驗（Bernoulli trial）

當隨機變數的結果以二分法區分為成功與失敗，我們稱這個隨機試驗為伯努力試驗。所以伯努力試驗的結果為{成功, 失敗}，它所對應的隨機變數值為{0, 1}，其中 0 表示失敗，1 表示成功。

定理 *7-1-1*：伯努力分配（Bernoulli distribution）

X 為伯努力隨機變數，且成功的機率為 $P(X=1)=p$，失敗的機率為 $P(X=0)=q=1-p$，通常以符號 $X\sim\text{Bernoulli}(p)$ 表示之，其機率函數為

$$f(x)=p^x(1-p)^{1-x}，x=0,1$$

或以表呈現則為

X	0	1
$f(x)$	$1-p$	p

定理 *7-1-2*：伯努力分配的期望值與變異數

$X\sim\text{Bernoulli}(p)$，則

⑴ $E(X)=p$

⑵ $V(X)=p(1-p)$

定義 *7-2-1*：二項隨機試驗（Binomial experiment）

⑴反覆執行 n 次伯努力試驗

⑵每次試驗「成功」的機率皆為相同（identical）的 p 值

⑶任何兩個伯努力試驗相互具獨立性（independent）

符合以上三條件的隨機試驗稱為二項隨機試驗，若以 Y 表示 n 次伯努力試驗中成功的次數，則我們稱 Y 為二項隨機變數，以符號 $Y \sim \text{Binomial}(n,p)$ 表示之。

定理 *7-2-1*：二項分配（Binomial distribution）

$Y \sim \text{Binomial}(n,p)$，則 Y 的機率函數為

$$f(Y=y)=f(y)=\binom{n}{y}p^y(1-p)^{n-y}\text{，}y=0,1,2,\cdots,n$$

其中 $\binom{n}{y}$ 為組合公式且 $\binom{n}{y}=\dfrac{n!}{y!\,(n-y)!}={}_nC_y$

定理 *7-2-2*：二項分配的期望值與變異數

$Y \sim \text{Binomial}(n,p)$，則 Y 的期望值、變異數及標準差為

⑴ $E(Y)=\mu=np$

⑵ $V(Y)=\sigma^2=np(1-p)$

⑶ $\sqrt{V(Y)}=\sigma=\sqrt{np(1-p)}$

定理 *7-3-1*：卜瓦松分配（Poisson distribution）

X 表示特定時間或空間內，某事件發生的次數，則隨機變數 X 之機率函數為

$$f(x)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}\text{，}x=0,1,2,\cdots$$

其中 λ 為該特定時間或空間內，事件發生次數的期望值（或平均值）。通常，我們以符號 $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ 來表示這個分配。

定理 *7-3-2*：卜瓦松分配的期望值與變異數

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$，則 X 之期望值、變異數與標準差為

(1) $E(X)=\mu=\lambda$

(2) $V(X)=\sigma^2=\lambda$

(3) $\sqrt{V(X)}=\sigma=\sqrt{\lambda}$

定義 *7-4-1*：常態機率密度函數（normal probability density function）

連續隨機變數 X 之機率密度函數若為

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty<x<\infty$$

其中，$\pi=3.14159\cdots$，$e=2.71828\cdots$，則我們稱這個機率密度函數為常態機率密度函數或常態分配，同時稱 X 為常態隨機變數，由於 (μ,σ) 這兩個參數決定了 X 的分佈型態，我們又以符號 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 表示這個常態分配。

定理 *7-4-1*：常態分配的特性

(1) 它的圖形是以 X 軸為漸進線（asymptotic），成鐘形（bell shape）型態向左右兩邊無限延伸，如圖 7-4-2。

(2) 鐘形最高點發生在 $X=\mu$，同時 $X=\mu$ 也正是鐘形的對稱軸。

(3) 鐘形在 $X=\mu+\sigma$ 及 $X=\mu-\sigma$ 位置，出現反曲點。

(4) 鐘形在 X 軸及 $X=\mu+\sigma$，$X=\mu-\sigma$ 所圍出的區域之面積約為 0.682，換言之

$$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma}f(x)\,dx=0.682$$

(5) 鐘形在 X 軸及 $X=\mu+2\sigma$，$X=\mu-2\sigma$ 所圍出的區域之面積約為 0.954，換言之

$$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=\int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} f(x)\,dx=0.954$$

(6) 鐘形在 X 軸及 $X=\mu+3\sigma$，$X=\mu-3\sigma$ 所圍出的區域之面積約為 0.996，換言之

$$P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)=\int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} f(x)\,dx=0.996$$

定理 *7-4-2*：常態分配的期望值與變異數

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，則 X 之期望值、變異數及標準差分別為

(1) $E(X)=\mu$

(2) $V(X)=\sigma^2$

(3) $\sqrt{V(X)}=\sigma$

定義 *7-4-2*：標準常態分配（standard normal distribution）

常態分配的期望值 $\mu=0$，標準差 $\sigma=1$ 時，我們稱它為標準常態分配，通常以符號 $Z\sim N(0,1)$ 表示之。其機率密度函數為

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad -\infty<z<\infty$$

定理 *7-4-3*：標準化（standardizing transformation）

X 是期望值（平均數）為 μ，變異數為 σ^2 的常態分配，換言之，$X\sim N(\mu,\sigma^2)$。若將 X 經過以下的標準化變數轉換

$$Z=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

則 Z 是一個標準常態分配，換言之，$Z\sim N(0,1)$

卜瓦松分配近似二項分配的經驗法則：

$X \sim \text{Binomial}(n, p)$，且(1) $n \geqq 50$ (2) $np < 5$，則卜瓦松分配可作為二項分配的近似分配，也就是

$$X \sim \text{Poisson}\ (np,\ npq)$$

常態分配近似二項分配的經驗法則：

$X \sim \text{Binomial}(n, p)$，且(1) $np \geq 5$ (2) $nq \geq 5$，則常態分配可做為二項分配的近似分配，也就是

$$X \sim N\ (np,\ npq)$$

連續性校正法則（continuity correction）

$X \sim \text{Binomial}(n, p)$，當我們以常態分配作為它的近似分配時，可以用下述連續性校正計算機率

(1) $P(X = x) = P(x - 0.5 \leq \mathrm{X} \leq x + 0.5)$

(2) $P(X \geq x) = P(X \geq x - 0.5)$

(3) $P(X \leq x) = P(X \leq x + 0.5)$

(4) $P(x_2 \leq X \leq x_1) = P(x_2 - 0.5 \leq \mathrm{X} \leq x_1 + 0.5)$

定義 *7A-1-1*：多項分配（multinomial distribution）

若無限母群體元素有 k 種類別（$k > 2$），自母群體中隨機抽樣 n 個元素，以 X_i 表示 n 個元素中屬於第 i 類別的計數（$i = 1, \cdots, k$）。則隨機變數 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 的機率函數為

$$\begin{aligned} & f(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_k = x_k) \\ &= f(x_1, x_2, \cdots, x_k) \\ &= \frac{n!}{x_1!\ x_2! \cdots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k} \end{aligned}$$

其中 $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ ，$p_1+p_2+\cdots+p_k=1$ 且 $p_i(i=1,\cdots,k)$ 為母群體中第 i 類元素所佔的比例。通常我們以符號 $(X_1,X_2,\cdots,X_k)\sim$ Multinomial $(n,p_1,\cdots,p_k)$ 來表示這個分配

定理 *7A-1-1*：多項分配的期望值與變異數

$(X_1,X_2,\cdots,X_k)\sim$ Multinomial $(n,p_1,\cdots,p_k)$

(1)期望值：$E(X_i)=np_i$，$i=1,2,\cdots,k$

(2)變異數：$V(X_i)=np_i(1-p_i)$，$i=1,2,\cdots,k$

(3)共變異：$Cov(X_i,X_j)=-np_ip_j,\ i\neq j$

定義 *7A-2-1*：幾何分配（Geometric distribution）

重複執行相互獨立的伯努力試驗，若 X 表示出現第一次成功所經歷的試驗次數，X 的可能值為 1, 2, ⋯。我們稱 X 為幾何隨機變數（Geometric random variable），它的機率函數為

$$f(x)=(1-p)^{x-1}\cdot p\quad ,x=1,2,\cdots$$

其中 p 為每一次伯努力試驗中成功的機率。通常，以符號 X~Geometric（p）來表示幾何分配。

定理 *7A-2-1*：幾何分配的期望值與變異數：X~Geometric（p），則

(1) $E(X)=\dfrac{1}{p}$

(2) $V(X)=\dfrac{q}{p^2}$

定義 *7A-3-1*：超幾何分配（Hypergeometric distribution）

從 N 個物件的有限母群體中，以不放回方式抽取 n 個物件，當母群體中有 K 個物件代表成功，其餘代表失敗。若以 X 表示 n 件中成功的件數，則 X 的可能值為 0,1,2,⋯,K，我們稱 X 為超幾何隨機變數

（hypergeometric random variable），它的機率函數為

$$f(x)=\frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad x=0,1,\cdots,K$$

通常以符號 X～Hypergeometric （N, K, n）表示超幾何分配

定理 *7A-3-1*：超幾何分配的期望值與變異數

X～Hypergeometric (N, K, n)，則

$$E(X)=n\cdot(\frac{K}{N})$$

$$V(X)=n(\frac{K}{N})(1-\frac{K}{N})(\frac{N-n}{N-1})$$

定義 *7A-4-1*：負二項分配（Negative binomial distribution）

重複執行相互獨立的伯努力試驗，若 X 表示出現第 r 次（$r>1$）成功所經歷的試驗次數，X 的可能值為 $r, r+1, r+2,\cdots$。我們稱 X 為負二項隨機變數（negative binomial random variable），它的機率函數為

$$f(x)=\binom{x-1}{r-1}p^r(1-p)^{x-r} \quad x=r,r+1,\cdots$$

其中 p 為每一次伯努力試驗中成功的機率，通常以符號 X～Negative-Binomial (p,r)表示。

定理 *7A-4-1*：負二項分配的期望值與變異數

X～Negative-Binomial (p,r)，則

$$E(X)=\frac{r}{p}$$

$$V(X)=\frac{r(1-p)}{p^2}$$

定義 *7A-5-1*：均勻分配（uniform distribution）

連續型隨機變數 X 在某一特定區間$[a, b]$內發生的機會均等（equally likely），我們稱這個隨機變數為均勻隨機變數（uniform random variable），它的機率密度函數為

$$f(x)=\frac{1}{b-a}，a \leq x \leq b$$

以符號 X～Uniform(a, b)表示均勻分配

定理 *7A-5-1*：均勻分配的期望值與變異數

X～Uniform(a, b)，則

$$E(X)=\frac{a+b}{2}$$

$$V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

定義 *7A-6-1*：伽傌函數（gamma function）

伽傌函數以符號$\Gamma(\cdot)$表示，它的定義為

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

定理 *7A-6-1*：伽傌函數的性質

$$(1)\ \Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

$$(2)\ \Gamma(1)=1$$

$$(3)\ \Gamma(\tfrac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

所以，當 α 為整數時$\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)!$

定理 *7A-6-2*：$\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}dx=\beta^\alpha\Gamma(\alpha)$

定義 *7A-6-2*：伽傌分配（gamma distribution）

連續型隨機變數X，定義在（$0,\infty$）區間的機率密度函數為

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}} \qquad x>0$$

我們稱X為具有伽傌分配的隨機變數以符號 $X\sim \text{Gamma}(\alpha,\beta)$ 表示。

定理 *7A-6-3*：伽傌分配的期望值與變異數

$$X\sim \text{Gamma}(\alpha,\beta)$$
$$E(X)=\alpha\beta$$
$$V(X)=\alpha\beta^2$$

定義 *7A-7-1*：指數分配（exponential distribution）

連續型隨機變數X，定義在（$0,\infty$）區間的機率密度函數為

$$f(x)=\frac{1}{\beta}e^{-\frac{x}{\beta}}，x>0$$

我們稱X為具有指數分配的隨機變數，以符號

$X\sim \text{Exponential}(\beta)$表示

定理 *7A-7-1*：指數分配的期望值與變異數

$X\sim \text{Exponential}(\beta)$，則

$$E(X)=\beta$$
$$V(X)=\beta^2$$

7.1 某生產線所生產之產品中，不良率為 5%，隨機抽取一件，若為良品則令 $X=0$，若為不良品則令 $X=1$，試求 X 之機率分配，並求其期望值與變異數。

解：

$$f(x)=p^x q^{1-x}=(0.05)^x(0.95)^{1-x}\ ,\ x=0\ ,1$$

$$E(X)=p=0.05$$

$$E(X^2)=\sum_{x=0}^{1} x^2\cdot f(x)=0\times 0.95+1\times 0.05=0.05$$

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=0.05-0.05^2=0.0475$$

或

$$V(X)=pq=0.05\times 0.95=0.0475$$

7.2 $X\sim$ Binomial$(4\ ,0.2)$，則

(1)$P(X=2)=$？

(2)$P(X\geq 2)=$？

(3)$E(X)=$？　$V(X)=$？

(4)$E(X^2)=$？

(5)$V(X^2)=$？

解：

(1)$P(X=2)=\binom{4}{2}(0.2)^2(0.8)^2=0.1536$

(2)
$$\begin{aligned}P(X\geq 2)&=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)\\&=\binom{4}{2}(0.2)^2(0.8)^2+\binom{4}{3}(0.2)^3(0.8)^1+\binom{4}{4}(0.2)^4(0.8)^0\\&=0.1536+0.0256+0.0016\\&=0.1808\end{aligned}$$

(3)$E(X)=np=4\times 0.2=0.8$

$V(X)=npq=4\times 0.2\times 0.8=0.64$

(4)$E(X^2)=V(X)+E^2(X)$

$=0.64+(0.8)^2=1.28$

(5) $V(X^2)=E[(X^2-E(X^2))^2]$

$=E[X^4-2E(X^2)X^2+E^2(X^2)]$

$=E(X^4)-2E(X^2)E(X^2)+E^2(X^2)$

$=E(X^4)-E^2(X^2)$

X	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.59	0.329	0.072	0.009	0
X^4	0	1	16	81	256

$E(X^4)=\sum_x x^4\cdot f(x)$

$=0\times 0.59+1\times 0.329+16\times 0.072+81\times 0.009+0\times 256$

$=2.21$

所以，$V(X^2)=E(X^4)-E^2(X^2)$

$=2.21-(1.28)^2$

$=2.21-1.638$

$=0.572$

7.3 罐中有 25 個球，其中 20 個紅球，5 個白球。從罐中隨機取出 4 球，若以 X 表示取出球中白球的數目。

(1)取出後再放回，X 的機率分配？

(2)取出後不再放回，X 的機率分配？

解：

(1)取出後再放回，所以 $X\sim\text{Binomial}(4,\frac{1}{5})$，其機率函數為

$$f(x)=\binom{4}{x}(\frac{1}{5})^x(\frac{4}{5})^{4-x}\ ,\ x=0,1,2,3,4$$

或以表表示如下：

X	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{256}{625}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$	$\frac{1}{625}$

⑵取出後不再放回，所以 $X \sim \text{Hypergeometric}(25, 5, 4)$，其機率函數為

$$f(x) = \frac{\binom{5}{x}\binom{20}{4-x}}{\binom{25}{4}}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4$$

7.4 血庫的統計資料顯示，80%的捐血人的血液為 Rh 陽性反應。某家診所急需 5 位 Rh 陽性反應血液民眾捐血，則至少要有多少捐血人完成血液捐贈才能夠確保取得 5 位民眾以上血液的機率超過 0.9？

解：

令 X 表示 n 位捐血人中屬 Rh 陽性反應的人數，則

$$X \sim \text{Binomial}(n, 0.8)$$

$$P(X \geq 5) = \sum_{x=5}^{n} \binom{n}{x}(0.8)^x(0.2)^{n-x}$$

$$= 1 - P(X \leq 4) > 0.9$$

所以，$P(X \leq 4) < 0.1$

從下述不同 n 值的累計機率值，得知至少要有 8 人捐血。

n	$P(X \leq 4)$
⋮	⋮
6	0.3446
7	0.1480
8	0.0563
⋮	⋮

7.5 假設在某電子工廠所生產的電子零件中有 10%為不良品，

⑴從其中隨機取樣 4 件，其中恰巧 1 件不良品的機率為何？

⑵為確保交貨品質，對上述 4 個零件進行出貨前品檢，因而所產生的修補成本為 $C=3X^2$，其中 X 為不良品件數，則上述 4 個電子零件交貨的期望修補成本為何？

解：

X 表示 4 個零件中的不良品件數，則

$$X \sim \text{Binomial}(4, 0.1)$$

⑴ P（恰巧 1 件不良品）$= P(X=1)$

$$= \binom{4}{1}(0.1)^1(0.9)^3$$

$$= 0.2916$$

⑵ $E(X) = np = 4 \times 0.1 = 0.4$

$V(X) = npq = 4 \times 0.1 \times 0.9 = 0.36$

$E(X^2) = V(X) + E^2(X) = 0.36 + (0.4)^2 = 0.52$

所以，

$$E(C) = 3E(X^2) = 3 \times 0.52 = 1.56$$

7.6 某大學中有 3%的同學智商（I.Q）超過 180，隨機抽取 50 位同學，其中 X 位同學智商超過 180。用卜瓦松近似分配計算 X 超過 3 人（含）的機率？

解：

X 為 50 位同學中 I.Q 超過 180 的人數，所以

$$X \sim \text{Binomial}(50, 0.03)$$

其期望值 $np = 50 \times 0.03 = 1.5$，所以 X 的卜瓦松近似分配為

$$X \sim \text{Poisson}(1.5)$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) \\ &= 1 - \frac{e^{-1.5}(1.5)^0}{0!} - \frac{e^{-1.5}(1.5)^1}{1!} - \frac{e^{-1.5}(1.5)^2}{2!} \\ &= 1 - e^{-1.5} - 1.5e^{-1.5} - 0.5625e^{-1.5} \end{aligned}$$

$$=1-3.0625e^{-1.5}$$

7.7 電腦開機時發生異常的機率為 0.004，則在 100 次開機中發生兩次異常的機率為何？

解：

令 X 表示 100 次開機中異常的次數，則

$$X \sim \text{Binomial}(100, 0.004)$$

所以，$P(X=2)=\binom{100}{2}(0.004)^2(0.996)^{98}$

若以卜瓦松分配來近似上述常態分配，則

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda)=\text{Poisson}(0.4)$$

其中 $\lambda=np=100\times0.004=0.4$，所以 $P(X=2)$ 的近似值為

$$P(X=2)=\frac{e^{-0.4}0.4^2}{2!}=0.05362$$

7.8 $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ 則

(1)$E[X(X-1)]=$？

(2)使用(1)之結果證明 $V(X)=\lambda$。

解：

$$\begin{aligned}(1)E[X(X-1)] &= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\ &= 0+0+2\cdot\frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!}+3\times2\frac{e^{-\lambda}\lambda^3}{3!}\cdots\cdots \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda}\cdot\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^y}{y!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} \\ &= \lambda^2\end{aligned}$$

（註）$\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^y}{y!}=e^{\lambda}$

⑵ $V(X)=E(X^2)-E^2(X)$

$=E(X^2)-E(X)+E(X)-E^2(X)$

$=E(X^2-X)+E(X)-E^2(X)$

$=E[X(X-1)]+E(X)-E^2(X)$

$=\lambda^2+\lambda-\lambda^2$

$=\lambda$

7.9 某織布廠所織出的布料，瑕疵點數的分配為每 10 平方公尺布料平均 4 個的卜瓦松分配，則

⑴每平方公尺布料中至少一個瑕疵點的機率＝？

⑵你買了 3 平方公尺布料，其中沒有任何瑕疵的機率＝？

解：

⑴令 X 表示每平方公尺中的瑕疵數，則

$$X \sim \text{Poisson}(0.4)$$

所以，P（每平方公尺至少一個瑕疵）

$=P(X\geq 1)$

$=1-P(X=0)$

$=1-\dfrac{e^{-0.4}(0.4)^0}{0!}$

$=1-e^{-0.4}$

⑵令 X 表示每 3 平方公尺中的瑕疵數，則

$$X \sim \text{Poisson}(1.2)$$

所以，P（每 3 平方公尺中沒有瑕疵）

$=P(X=0)$

$=\dfrac{e^{-1.2}(1.2)^0}{0!}$

$=e^{-1.2}$

7.10 顧客到達超市結帳櫃臺的人次為每 5 分鐘平均 4 人的卜瓦松分配，

(1)下一個 10 分鐘內恰巧有 8 人至結帳區的機率＝？

(2)下一個 10 分鐘內不超過 3 人至結帳區的機率＝？

(3)下一個 10 分鐘內至少 2 人至結帳區的機率＝？

(4)上午 9：00 至 9：10 及上午 9：10 至 9：20 兩個 10 分鐘時段內恰巧 2 人至結帳區的機率＝？

(5)上午 10：00 至 10：10 及上午 11：00 至 11：10 兩個 10 分鐘時段內恰巧 2 人至結帳區的機率＝？

解：

令 X 表示 10 分鐘內顧客到達結帳區的人數，則 X 為平均 8 人次的卜瓦松分配，也就是

$$X \sim \text{Poisson}(8)$$

(1) P（下一個 10 分鐘內恰巧有 8 人至結帳區）

$= P(X=8)$

$= \dfrac{e^{-8}8^8}{8!}$

$= 0.593 - 0.453$（查表）

$= 0.140$

(2) P（下一個 10 分鐘內不超過 3 人至結帳區）

$= P(X \leq 3)$

$= \dfrac{e^{-8}8^0}{0!} + \dfrac{e^{-8}8^1}{1!} + \dfrac{e^{-8}8^2}{2!} + \dfrac{e^{-8}8^3}{3!}$

$= 0.042$（查表）

(3) P（下一個 10 分鐘內至少 2 人至結帳區）

$= P(X \geq 2)$

$= 1 - P(X \leq 1)$

$= 1 - \dfrac{e^{-8}8^0}{0!} - \dfrac{e^{-8}8^1}{1!}$

$= 0.997$（查表）

⑷ 9：00 至 9：10 及 9：10 至 9：20 這兩個時段是相連的，所以令 Y 為 9：00 至 9：20 這 20 分鐘時段內到達結帳區的人數，則

$$Y \sim \text{Poisson}(16)$$

所以，P（9：00 至 9：20 恰有 2 人至結帳區）

$$=P(Y=2)$$
$$=\frac{e^{-16}16^2}{2!}$$
$$=1.44\times10^{-5}$$

⑸ 10：00 至 10：10 及 11：00 至 11：10 這兩個時段為分離的時段，令 X, Y 分別表示這兩個時段內到達結帳區的人數，則

$$X \sim \text{Poisson}(8)$$
$$Y \sim \text{Poisson}(8)$$

所以，P（兩個時段內恰有 2 人至結帳區）

$$=P(X+Y=2)$$
$$=P(X=0\,,Y=2)+P(X=1\,,Y=1)+P(X=2\,,Y=0)$$
$$=P(X=0)\,P(Y=2)+P(X=1)\,P(Y=1)+P(X=2)\,P(Y=0)$$
$$=2\cdot\left(\frac{e^{-8}8^0}{0!}\right)\left(\frac{e^{-8}8^2}{2!}\right)+\frac{e^{-8}8^1}{1!}\,\frac{e^{-8}8^1}{1!}$$
$$=7.2\times10^{-6}+7.2\times10^{-6}$$
$$=1.44\times10^{-5}$$

（註）⑷、⑸兩小題計算得到相同結果的原因是(a)卜瓦松分配時段內事件發生的強度（平均值）與時段長度成正比(b)卜瓦松分配不同時段內事件發生的機率具有獨立性。

7.11 某網路服務業者（ISP, Internet Service Provider）統計資料顯示，它的用戶撥接上網次數是平均每微秒（millisecond）0.02 次的卜瓦松分配，則下一秒內撥接上網人次不超過 5 人的機率＝？

解：

令 X 表示 1 秒內撥接上網的人次，則它的分配為平均數 20 人次（$0.02\times10^3=20$）的卜瓦松分配，也就是

$$X\sim\text{Poisson}(20)$$

所以，P（下一秒內撥接人數不超過 5 人）

$$\begin{aligned}&=P(X\le 5)\\&=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)\\&=\frac{e^{-20}(20)^0}{0!}+\frac{e^{-20}(20)^1}{1!}+\frac{e^{-20}(20)^2}{2!}+\frac{e^{-20}(20)^3}{3!}+\frac{e^{-20}(20)^4}{4!}+\frac{e^{-20}(20)^5}{5!}\end{aligned}$$

7.12 電腦磁片製造過程中，因品質問題常造成磁軌中有局部壞軌（無法存取資料），壞軌數目可經由品檢加以判定，某磁片製造商所製造的磁片，平均壞軌數為每張磁片平均有 0.1 個壞軌。

⑴你使用這家公司的某張磁片時，它沒有壞軌的機率是多少？

⑵你使用這家公司的兩張磁片皆無壞軌的機率？

解：

令 X 表示每張磁片中的壞軌數，則

$$X\sim\text{Poisson}(0.1)$$

⑴ P（某張磁片無壞軌）$=P(X=0)$

$$=\frac{e^{-0.1}(0.1)^0}{0!}$$

$$=0.905$$

⑵這題有兩種解法(a)及(b)

(a)令 Y 表示兩張磁片中的壞軌數，則

$$Y\sim\text{Poisson}(0.2)$$

P（兩張磁片無壞軌）$=P(Y=0)$

$$= \frac{e^{-0.2}(0.2)^0}{0!}$$

$$= 0.819$$

(b) P（兩張磁片無壞軌）$= \binom{2}{2}(0.905)^2(0.095)^0$

$$= 0.819$$

7.13 某公司添購機器設備，有 A、B 兩種機型可供挑選。A 機器在每天的運轉中需要校正的次數 X 是一個卜瓦松分配，其平均數為 0.1T，B 機器在每天運轉中需要校正的次數 Y 也是一個卜瓦松分配，它的平均數為 $0.12T$，其中 T 為當日的機器總運轉時間。在校正及其他成本的考量下，A 機器的總成本函數為 $C_A = 10T + 30X^2$，B 機器的總成本為 $C_B = 8T + 30Y^2$，假設校正花費時間甚短可以忽略不計，則在總成本期望值最小化的準則下該公司應該買那一部機器？

⑴如果每日總運轉時間為 8 小時。

⑵如果每日總運轉時間為 16 小時。

解：

A 機器故障次數分配為　$X \sim \text{Poisson}(0.1T)$，所以

$$E(X) = 0.1T$$
$$V(X) = 0.1T$$
$$E(X^2) = V(X) + E^2(X)$$
$$= 0.1T + 0.01T^2$$

B 機器故障次數分配為　$Y \sim \text{Poisson}(0.12T)$

$$E(Y) = 0.12T$$
$$V(Y) = 0.12T$$
$$E(Y^2) = V(Y) + E^2(Y)$$
$$= 0.12T + 0.0144T^2$$

A 機器總成本的期望值為

$$E(C_A) = E(10T + 30X^2)$$

$$
\begin{aligned}
&= 10\,E(T) + 30E(X^2) \\
&= 10T + 30\,(0.1T + 0.01T^2) \\
&= 13T + 0.3T^2
\end{aligned}
$$

B 機器總成本的期望值為

$$
\begin{aligned}
E(C_B) &= E(8T + 30Y^2) \\
&= 8\,E(T) + 30E(Y^2) \\
&= 8T + 30\,(0.12T + 0.0144T^2) \\
&= 11.6T + 0.432T^2
\end{aligned}
$$

⑴如果每日總運轉時間為 8 小時，則

$$
E(C_A) = (13T + 0.3T^2)\Big|_{T=8} = 13 \times 8 + (0.3) \times 8^2 = 123.2
$$
$$
E(C_B) = (11.6T + 0.432T^2)\Big|_{T=8} = 11.6 \times 8 + (0.432) \times 8^2 = 120.448
$$

所以，應該買 B 機器。

⑵如果每日總運轉時間為 16 小時，則

$$
E(C_A) = (13T + 0.3T^2)\Big|_{T=16} = 13 \times 16 + (0.3)16^2 = 284.8
$$
$$
E(C_B) = (11.6T + 0.432T^2)\Big|_{T=16} = 11.6 \times 16 + (0.432)16^2 = 296.192
$$

所以，應該買 A 機器。

7.14 上班時間，公司電話總機平均每 5 分鐘接到 4 通電話，則早上 10：00 到 10：10 分之間，總機轉接 6 通電話的機率為多少？

解：

每 5 分鐘平均 4 通電話，換算成每 10 分鐘 8 通電話，所以 10：00 到 10：10 分間電話撥入公司總機的通數 X 為

$$
X \sim \text{Poisson}\,(8)
$$

P（轉接 6 通電話）$= P(X = 6)$

$$=\frac{e^{-8}8^6}{6!}$$
$$=0.1221$$

7.15 市區某小型停車場最多可停 5 輛，假設每小時到達該停車場的車輛數為卜瓦松隨機變數，它的平均數為每小時 0.5 輛。

(1)停車場在營業第一個小時停滿的機率＝？（假設所有車輛的停車時間皆超過 1 小時）

(2)在一天 8 小時的營業時間內，到達停車場車輛數少於 2 輛的機率＝？

解：

(1)以 X 表示第 1 小時內到達的車輛數，則

$$X \sim \text{Poisson}(0.5)$$

所以，P（第 1 小時停滿）

$$=P(X \geq 5)$$
$$=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)-P(X=3)-P(X=4)$$
$$=1-e^{-0.5}-\frac{1}{2}e^{-0.5}-\frac{1}{8}e^{-0.5}-\frac{1}{48}e^{-0.5}-\frac{1}{384}e^{-0.5}$$
$$=1-\frac{633}{384}e^{-0.5}$$

(2)以 Y 表示 1 天 8 小時內到達的車輛數，則

$$Y \sim \text{Poisson}(4)$$

所以，P（到達停車場車輛少於 2 台）

$$=P(Y<2)$$
$$=P(Y=0)+P(Y=1)$$
$$=e^{-4}+4e^{-4}$$
$$=5e^{-4}$$

7.16 $Z \sim N(0,1)$，請查表計算下列機率值

(1)$P(0 \leq Z \leq 1)$

(2)$P(Z \geq 1)$

(3)$P(Z \leq 0.75)$

(4)$P(0.25 \leq Z \leq 0.75)$

(5)$P(-1.96 \leq Z \leq -1.5)$

(6)計算出 k，使得 $P(-k \leq Z \leq k) = 0.95$

解：

查表得知 (1) 0.3413 (2) 0.1587 (3) 0.7734 (4) 0.1747 (5) 0.0418 (6)$k = 1.96$

7.17 X 為常態隨機變數，它的期望值為 50，標準差為 10

(1)計算 $P(X \leq 65) =$ ？

(2)計算 $P(42 \leq X \leq 62) =$ ？

解：

$X \sim N(50, 10^2)$，所以

$$(1)P(X \leq 65) = P\left(\frac{X-50}{10} \leq \frac{65-50}{10}\right)$$
$$= P(Z \leq 1.5)$$
$$= 0.9332$$

$$(2)P(42 \leq X \leq 62) = P\left(\frac{42-50}{10} \leq \frac{X-50}{10} \leq \frac{62-50}{10}\right)$$
$$= P(-0.8 \leq Z \leq 1.2)$$
$$= 0.6730$$

7.18 根據高速公路地磅的統計資料顯示，卡車載重量是一個常態分配，它的平均數為 7 公噸，標準差為 2 公噸，(1)有多少比例行駛在高速公路上的卡車，它的載重超過 9 公噸？(2)有多少比例行駛在高速公路上的卡車，它的載重不超過 5.24 公噸？

解：

令 X 表示卡車的載重量，則 $X \sim N(7, 2^2)$，所以

(1) P（載重超過 9 公噸）$= P(X > 9)$

$$=P(\frac{X-7}{2}>\frac{9-7}{2})$$
$$=P(Z>1)$$
$$=0.1587$$

⑵ P（載重不超過 5.24 公噸）$=P(0<X<5.24)$

$$=P(\frac{0-7}{2}<Z<\frac{5.24-7}{2})$$
$$=P(-3.5<Z<-0.88)$$
$$=0.1894$$

7.19 行動電話統計資料顯示，用戶每通電話通話時間為常態分配，它的平均數為 100 秒標準差為 4 秒。某電話公司推出促銷特惠專案，根據該公司成本分析，如果通話時間多於 95 秒，該通電話的成本為 18 元，如果通話時間少於 95 秒，該通電話的成本為 10 元，則這家電話公司的每通電話營運成本期望值（平均值）是多少？

解：

令 X 表示通話時間，則 $X \sim N(100, 16)$，所以

P（通話時間多於 95 秒）$=P(X>95)$

$$=P(\frac{X-100}{4}>\frac{95-100}{4})$$
$$=P(Z>-1.25)$$
$$=0.8944$$

P（通話時間少於 95 秒）$=1-0.8944=0.1056$

令 C 表示每通電話營運成本，則

$$C=\begin{cases}10 & X<95\\ 18 & X\geq 95\end{cases}$$

所以，每通電話營運成本期望值 $E(C)$ 為

$$E(C)=10\times P(X<95)+18\times P(X\geq 95)$$
$$=10\times 0.1056+18\times 0.8944$$

$= 17.1552$

7.20 某電子工廠所產製的電子零件特性X為常態分配，它的平均數是 10，變異數是 2，由於變異太大，所以採取分類銷售，第一類為$X<8$，第二類為$8 \le X < 12$，第三類為$X \ge 12$。則隨機抽樣該工廠生產的 15 個電子零件中三類零件數目相等的機率＝？

解：

$X \sim N(10, 2)$，所以該工廠的產出中三類零件所佔的比例分別為

$$
\begin{aligned}
P(\text{第一類零件的比例}) &= P(X<8)\\
&= P\left(\frac{X-10}{\sqrt{2}} < \frac{8-10}{\sqrt{2}}\right)\\
&= P(Z < -1.414)\\
&= 0.0793
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(\text{第二類零件的比例}) &= P(8 \le X < 12)\\
&= P\left(\frac{8-10}{\sqrt{2}} \le \frac{X-10}{\sqrt{2}} < \frac{12-10}{\sqrt{2}}\right)\\
&= P(-1.414 \le Z < 1.414)\\
&= 0.8414
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(\text{第三類零件的比例}) &= P(X \ge 12)\\
&= P(Z \ge 1.414)\\
&= 0.0793
\end{aligned}
$$

令(Y_1, Y_2, Y_3)表示 15 個零件中三類零件的數目，則

$$(Y_1, Y_2, Y_3) \sim \text{Multinomial}(15, 0.0973, 0.8414, 0.0973)$$

所以，

$$
\begin{aligned}
&P(\text{三類零件數目相等})\\
&= P(Y_1 = 5, Y_2 = 5, Y_3 = 5)\\
&= \frac{15!}{5!\,5!\,5!}(0.0973)^5(0.8414)^5(0.0973)^5
\end{aligned}
$$

7.21 某機械工廠所生產的軸承，其直徑是平均數為 3.0005 公分，標準差為 0.001 公分的常態分配。顧客所要求的直徑規格為 3.000 ± 0.002 公分，則這批生產的軸承中有多少百分比不符合顧客的要求？

解：

令 X 表示產出軸承的直徑，則

$$X \sim N(3.0005, (0.001)^2)$$

所以，P（不符合顧客要求的軸承）

$$\begin{aligned}
&= P(X > 3.002 \text{ 或 } X < 2.998) \\
&= P(X > 3.002) + P(X < 2.998) \\
&= P\left(\frac{X-3.0005}{0.001} > \frac{3.002-3.0005}{0.001}\right) + P\left(\frac{X-3.0005}{0.001} < \frac{2.998-3.0005}{0.001}\right) \\
&= P(Z > 1.5) + P(Z < -2.50) \\
&= 0.0688 + 0.0062 \\
&= 0.073
\end{aligned}$$

7.22 某鋼鐵廠所生產的強力鋼條，能夠承受壓力的強度為常態分配，其平均數為 8500 磅，標準差為 80 磅。某建築工地中使用 3 隻這種鋼條，則這 3 隻鋼條皆能承受 8700 磅以上重物的機率＝？

解：

令 X 表示鋼條能夠承受的壓力，則

$$X \sim N(8500, (80)^2)$$

所以，一隻鋼條能承受 8700 磅以上壓力的機率為

$$\begin{aligned}
&P(X > 8700) \\
&= P\left(\frac{X-8500}{80} > \frac{8700-8500}{80}\right) \\
&= P(Z > 2.5) \\
&= 0.0062
\end{aligned}$$

令 Y 表示 3 隻鋼條中能夠承受 8700 磅壓力的鋼條數目，則

$$
\begin{aligned}
&P\text{（三隻鋼條皆能承受 8700 以上壓力）}\\
&=P(Y=3)\\
&=\binom{3}{3}(0.0062)^3(0.9938)^0\\
&=(0.0062)^3\\
&=2.3833\times 10^{-7}
\end{aligned}
$$

7.23 受到經濟不景氣的影響，統計資料顯示所有上市基金（mutual fund）的季投資報酬率為常態分配，平均數為−5%，標準差為 3%。

(1)所有基金中季報酬率低於−6%的比例有多少。

(2)有多少百分比的基金買主在這季內他們的基金市值下降了。

解：

令 X 表示基金的季投資報酬率，則

$$X\sim N(-0.05,(0.03)^2)$$

(1) P（季報酬率低於−6%）

$$
\begin{aligned}
&=P(X<-0.06)\\
&=P\left(\frac{X+0.05}{0.03}<\frac{-0.06+0.05}{0.03}\right)\\
&=P\left(Z<-\frac{1}{3}\right)\\
&=0.3707
\end{aligned}
$$

所以，有 37.07%（大約 4 成）的基金季報酬率低於−6%。

(2) P（基金市值下降）

$$
\begin{aligned}
&=P(X<0)\\
&=P\left(\frac{X+0.05}{0.03}<\frac{0+0.05}{0.03}\right)\\
&=P(Z<1.67)\\
&=0.9525
\end{aligned}
$$

這表示，有 95.25%的投資人財富縮水了。

7.24 入學考試全體考生成績為常態分配，它的平均數是 500，標準差為 80，

(1)有多少同學的成績超過 600？

(2)錄取前 10%，則錄取的最低成績是多少？

解：

令 X 表示入學考試成績，則

$$X \sim N(500, 80^2)$$

(1) P（分數超過 600）$= P(X > 600)$

$$= P\left(\frac{X-500}{80} > \frac{600-500}{80}\right)$$

$$= P(Z > 1.25)$$

$$= 0.1056$$

(2)假設 K 為最低錄取成績，則

$$P(X > K) = 0.10$$

$$= P\left(\frac{X-500}{80} > \frac{K-500}{80}\right)$$

查表得知，

$$\frac{K-500}{80} = 1.28$$

所以，最低錄取成績 $K = 602.4$

7.25 統計學期中考成績為常態分配，已知有 92.5%同學成績高於 60 分，3.92%同學成績高於 90 分，則這個常態分配的期望值（平均數）與變異數各為何？

解：

假設統計成績的常態分配為 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，則

$$P(X \geq 60) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{60-\mu}{\sigma}\right) = 0.925$$

查表得知 $\dfrac{60-\mu}{\sigma} = -1.44$

$$P(X\geq 90)=P(\frac{X-\mu}{\sigma}\geq\frac{90-\mu}{\sigma})=0.0392$$

查表得知 $\frac{90-\mu}{\sigma}=1.76$

$$\begin{cases}\frac{60-\mu}{\sigma}=-1.44\\ \frac{90-\mu}{\sigma}=1.76\end{cases}$$

聯合求解得到 $\mu=73.5$ ， $\sigma=9.375$

7.26 在大學校園中有 6%同學為雙主修，從校園中隨機取樣 100 位同學

(1)其中有 2 位以上（含）雙主修的機率。

(2)其中有 4（含）到 8（含）位雙主修的機率。

解：

令 X 表示 100 位同學中雙主修的人數，則

$$X\sim \text{Binomial}(100,0.06)$$
$$E(X)=np=100\times 0.06=6$$
$$V(X)=np(1-p)=100\times 0.06\times 0.94=5.64$$

所以 X 的近似常態分配為 $X\dot{\sim} N(6,5.64)$

(1) P（2 位（含）以上雙主修）$=P(X\geq 2)$

$$=P(X\geq 2-(0.5)$$
$$=P(\frac{X-6}{2.37}\geq\frac{1.5-6}{2.37})$$
$$=P(Z\geq -1.9)$$
$$=0.9713$$

(2) P（4 位（含）到 8 位（含）雙主修）

$$=P(4\leq X\leq 8)$$
$$=P(3.5\leq X\leq 8.5)$$
$$=P(\frac{3.5-6}{2.37}\leq Z\leq\frac{8.5-6}{2.37})$$

$=P(-1.05 \le Z \le 1.05)$

$=0.7062$

7.27 某銀行信用卡客戶統計資料顯示，有 42%的持卡人是男性，則隨機取樣 150 位持卡人中有 66 人（含）以下為男性持卡人的機率是多少？

解：

X 表示 150 位持卡人中男性的人數，則

$$X \sim \text{Binomial}(150, 0.42)$$
$$E(X)=np=150\times 0.42=63$$
$$V(X)=npg=150\times 0.42\times 0.58=36.54$$

所以，X 的常態近似分配為 $X \sim N(63, 36.54)$

$$P\text{（150 位持卡人中，66 位（含）以下男性）}$$
$$=P(X\le 66)$$
$$=P(X\le 66.5)$$
$$=P(\frac{X-63}{\sqrt{36.54}}\le\frac{66.5-63}{\sqrt{36.54}})$$
$$=P(Z\le 0.58)$$
$$=0.7190$$

所以，150 位持卡人中，66 人以下是男性的機率為 0.7190

7.28 某隱形眼鏡製造商所生產的鏡片中有 5%為不良品，從其中隨機抽樣 100 片，則樣本不良比率低於 0.04 的機率是多少？

解：

X_i 表示鏡片是否為良品的伯努力變項，則

$$X_i \sim \text{Bernoulli}(0.05)\text{，} i=1,\cdots,100$$
$$E(X_i)=p=0.05$$
$$V(X_i)=pq=0.05\times 0.95=0.0475$$

$\hat{p}$ 表示抽樣樣本中不良鏡片的比例，事實上 $\hat{p}=\Sigma X_i/100$，所以，根據中央極

限定理（參考第 8 章）

$$\hat{p} \doteq N(0.05, \frac{0.0475}{100})$$

所以，P（樣本不良比率低於 0.04）

$$= P(\hat{p} < 0.04)$$

$$= P\left(\frac{\hat{p} - 0.05}{\sqrt{\frac{0.0475}{100}}} < \frac{0.04 - 0.05}{\sqrt{\frac{0.0475}{100}}}\right)$$

$$= P(Z < -0.46)$$

$$= 0.3228$$

7.29 當身高呈現常態分配，且變異數為 25，若欲使母群體平均數與樣本平均數之差的絕對值小於 1 的機率為 0.95，則最少的抽樣數為？

解：

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim Z$$

所以，$P(-1.96 \le \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le 1.96) = 0.95$

$$P(-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{X} - \mu \le 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 0.95$$

$$P(|\bar{X} - \mu| \le 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 0.95$$

所以 $1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le 1$

$$n \ge (1.96 \times 5)^2$$

$$n \ge 96.04$$

所以，最少的抽樣數為 97。