第 6 章

隨機變數及機率分配

定義 *6-1-1*：隨機變數（random variable）

將隨機試驗的結果予以量化，通常我們以變數 X 表示這些量化值，並稱之為隨機變數。

定義 *6-1-2*：間斷隨機變數（discrete random variable）

當隨機變數的所有可能值為有限個數（finite）或可數無限個數（countable）時，我們稱它為間斷隨機變數。

定義 *6-1-3*：連續隨機變數（continuous random variable）

當隨機變數的所有可能值為無限個數（infinite）時，我們稱它為連續隨機變數。

定義 *6-2-1*：間斷機率分配（discrete probability distribution）

以表（table）、圖（graph）或函數（function）來呈現間斷隨機變數 X 的每個單一變數值 (x) 的機率 $P(X=x)$，我們稱這些表、圖或函數為這個間斷隨機變數的機率分配。

定義 *6-2-2*：機率函數的基本性質

$f(x)$ 為間斷隨機變數 X 的機率函數（probability function or probability mass function），則它必須具備以下性質

(1) $0 \leqq f(x) \leqq 1$

(2) $\sum_{x} f(x) = 1$

定義 *6-2-3*：累積機率分配（cumulative probability）

$f(x)$ 為間斷隨機變數 X 的機率函數，則隨機變數 X 的累積機率分配以 $F(x)$ 表示且

$$F(x) = P(X \leqq x) = \sum_{t \leq x} f(t)$$

定義 *6-2-4*：機率函數與累積機率函數間的關係

間斷隨機變數 X 的機率函數及累積機率函數分別為 $f(x)$ 及 $F(x)$，若 X 所有可能值為 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$，則

(1) $f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}),\ i = 1, \cdots, n$

(2) $P(a \leqq x \leqq b) = F(b) - F(a) + f(a)$

(3) $P(a < x \leqq b) = F(b) - F(a)$

(4) $P(a \leqq x < b) = F(b) - F(a) - f(b) + f(a)$

(5) $P(a < x < b) = F(b) - F(a) - f(b)$

定義 *6-3-1*：間斷隨機變數的期望值（expected value of a discrete random variable）

X 為一個間斷隨機變數，以符號 $E(X)$ 表示它的期望值，其定義為

$$E(X) = \sum_{\forall x} x f(x)$$

定義 *6-3-2*：間斷隨機變數函數的期望值（expected value of a function of a discrete random variable）

X 為一個間斷型隨機變數，$Y = g(X)$ 為 X 的函數，則 Y（或 $g(X)$）的期望值為

$$E(Y)=E(g(X))=\sum_{\forall x} g(x)\cdot f(x)$$

其中 $f(x)$ 為 $P(X=x)$

定義 *6-4-1*：間斷隨機變數的變異數（variance of a discrete random variable）

X 為一個間斷的隨機變數，以符號 $V(X)$ 表示為它的變異數，其定義如下

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left[(X-E(X))^2\right] \\ &= \sum_{\forall x}(x-E(X))^2\cdot f(x) \end{aligned}$$

定義 *6-5-1*：機率密度函數（probability density function）

$f(x)$ 為連續隨機變數 X 的機率密度函數，則它必需具備以下性質

(1) $f(x)\geq 0$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$

(3) $P(a<x<b)=\int_a^b f(x)\,dx$

定義 *6-5-2*：連續隨機變數的累積機率分配

$f(x)$ 為連續隨機變數的機率密度函數，則 X 的累積機率分配 $F(x)$ 為

$$F(x)=P(X\leqq x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\text{，}-\infty<t<\infty$$

定義 *6-6-1*：連續隨機變數的期望值

$f(x)$ 為連續隨機變數 X 之機率密度函數，則 X 之期望值（或平均數）為

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx$$

定義 *6-6-2*：連續隨機變數的函數之期望值

$f(x)$ 為連續隨機變數 X 之機率密度函數，則 $Y=g(X)$ 為 X 的函數，則 Y 之期望值為

$$E(Y)=E(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cdot f(x)dx$$

定義 *6-7-1*：連續隨機變數的變異數

$f(x)$ 為連續隨機變數 X 之機率密度函數，則 X 之變異數為

$$V(X)=E(X-E(X)^2)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))^2\cdot f(x)dx$$

定理 *6-8-1*：變異數的另一種算法

$$V(X)=E(X^2)-〔E(X)〕^2$$

定理 *6-8-2*：$E(aX+b)=aE(X)+b$

定理 *6-8-3*：$V(aX+b)=a^2\cdot V(X)$

定理 *6A-1-1*：$E(c)=c$，其中 c 為常數

定理 *6A-1-2*：期望運算的線性展開

$f(x)$ 為隨機變數 X 的機率函數，$G_1(X),\cdots,G_k(X)$ 為 K 個 X 的函數則

$$\begin{aligned}E(\sum_i a_iG_i(X)) &= E(a_1G_1(X)+a_2G_2(X)+\cdots+a_kG_k(X))\\ &= E(a_1G_1(X))+E(a_2G_2(X))+\cdots+E(a_kG_k(X))\\ &= \sum_i a_i E(G_i(X))\end{aligned}$$

其中 $a_1,\cdots,a_k$ 為常數

定義 *6A-2-1*：共變異（covariance）

X, Y 兩隨機變數的共變異，以符號 $Cov(X, Y)$ 表示，其定義為

$$Cov(X, Y) = E\left[(X - E(X))(Y - E(Y))\right]$$

定理 *6A-2-1*：$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

定理 *6A-2-2*：當 X, Y 互相獨立時，$Cov(X, Y) = 0$

定理 *6A-2-3*：$V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2abCov(X, Y)$

定理 *6A-2-4*：當 X, Y 互相獨立（或無關）時

$$V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y)$$

定義 *6A-3-1*：相關係數（correlation coefficient）

兩隨機變數 X, Y 的相關係數以符號 ρ 表示，其定義如下：

$$\begin{aligned}\rho &= E\left(\frac{(X - E(X))}{\sigma_x} \cdot \frac{(Y - E(Y))}{\sigma_y}\right) \\ &= \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}\end{aligned}$$

其中 σ_x，σ_y 分別為 X, Y 的標準差

相關係數 ρ 的性質與意義：

1. $-1 \leq \rho \leq 1$，ρ 為正表示 X, Y 間的關係為正向互動，ρ 為負表示 X, Y 間為反向互動
2. $\rho = 1$ 表示 X, Y 間的關係為完全正線性關係
3. $\rho = -1$ 表示 X, Y 間關係為完全負線性關係
4. ρ 的絕對值愈大表示 X, Y 間的線性關係愈強

5. $\rho=0$ 表示 X, Y 間沒有線性關係，但這並不表示 X, Y 間沒有其他關係。

定理 ***6A-4-1***：契比雪夫定理（Chebyshev's theorem）

$X\sim(\mu, \sigma^2)$ 表示隨機變數 X 的期望值為μ，變異數為 σ^2，則

$$P(|X-\mu|<k\sigma)\geq 1-\frac{1}{k^2} \quad \forall k>1$$

6.1 某硬幣正面的機率是反面的 3 倍，投擲這枚硬幣 3 次，令 X 表示正面的次數，

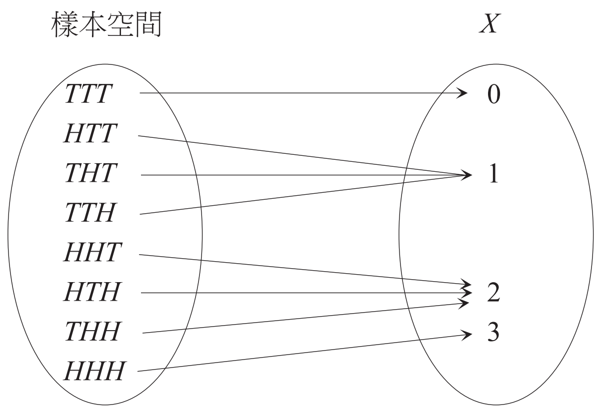
(1) X 的機率函數？

(2) X 的累積分配？

(3) X 的期望值與變異數？

解：

(1)以 H 代表正面，T 代表反面，樣本空間與 X 間的關係為



正面的機率是反面機率的 3 倍，所以 $P(H)=\frac{3}{4}$，$P(T)=\frac{1}{4}$

$$P(X=0)=P(TTT)=P(T)\times P(T)\times P(T)=(\tfrac{1}{4})^3=\frac{1}{64}$$

$$\begin{aligned}P(X=1)&=P(HTT,THT,TTH)\\&=P(HTT)+P(THT)+P(TTH)\\&=(\tfrac{3}{4})(\tfrac{1}{4})^2+(\tfrac{3}{4})(\tfrac{1}{4})^2+(\tfrac{3}{4})(\tfrac{1}{4})^2\\&=\binom{3}{1}(\tfrac{3}{4})(\tfrac{1}{4})^2\\&=\frac{9}{64}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(X=2)&=P(HHT,HTH,THH)\\&=P(HHT)+P(HTH)+P(THH)\\&=(\tfrac{3}{4})^2(\tfrac{1}{4})+(\tfrac{3}{4})^2(\tfrac{1}{4})+(\tfrac{3}{4})^2(\tfrac{1}{4})\end{aligned}$$

$$=\binom{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{27}{64}$$

$$P(X=3)=P(HHH)$$

$$=P(H)P(H)P(H)$$

$$=\left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$=\binom{3}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^0$$

$$=\frac{27}{64}$$

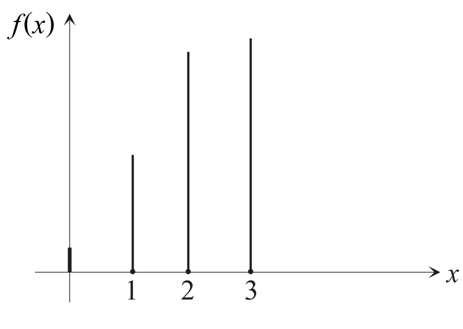
所以，X的機率函數為

X	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

若以公式表示則為

$f(x)=\binom{3}{x}\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{3-x}$，$x=0, 1, 2, 3$

若以圖形表示則為



⑵X的累積分配為

X	0	1	2	3
$F(x)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{10}{64}$	$\frac{37}{64}$	$\frac{64}{64}$

$$(3)E(X)=0\times\frac{1}{64}+1\times\frac{9}{64}+2\times\frac{27}{64}+3\times\frac{27}{64}$$
$$=\frac{9}{4}$$
$$V(X)=E(X^2)-(\frac{9}{4})^2$$
$$=(0\times\frac{1}{64}+1\times\frac{9}{64}+4\times\frac{27}{64}+9\times\frac{27}{64})-(\frac{9}{4})^2$$
$$=\frac{9}{16}$$

6.2 某對新婚夫婦在購買冰箱時，不知是否要加買 5 年免費維修保險費 1,250 元，根據維修統計資料顯示過去 5 年內這型電冰箱維修次數的機率分配如下：

維修次數	機率
0	$\frac{10}{50}$
1	$\frac{22}{50}$
2	$\frac{13}{50}$
3	$\frac{5}{50}$

每次維修的成本為 500 元，請問這對夫婦是否該買這個額外的 5 年保險呢？

解：

以 C 代表維修成本，則 C 的機率函數為

X	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{10}{50}$	$\frac{22}{50}$	$\frac{13}{50}$	$\frac{5}{50}$
$C=500X$	0	500	1,000	1,500

5 年維修成本的期望值為

$$E(C)=E(50X)=0\times\frac{10}{50}+500\times\frac{22}{50}+1,000\times\frac{13}{50}+1,500\times\frac{5}{50}$$
$$=630$$

$E(C)<1,250$，所以，不買這個保險是明智的決定。

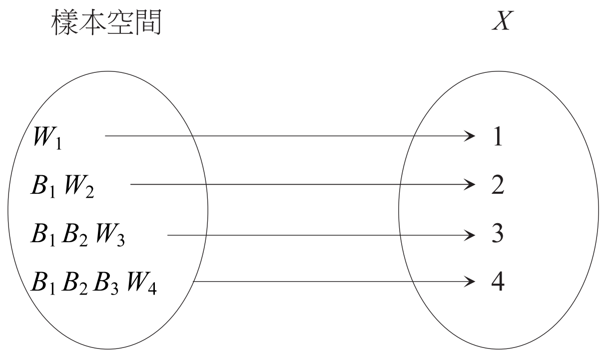
6.3 袋中有 4 球（3 黑球 1 白球），從袋中隨機抽取一球，若抽到白球則停止該隨機試驗，若抽到黑球則丟棄該黑球後再從袋中隨機抽取另一球，上述過程反覆進行直到抽到白球為止，若 X 表示抽到白球所需的抽球次數

⑴ X 之機率函數？

⑵ X 之累積分配？

解：

⑴以 B 代表黑球，W 代表白球，並以 B_i 代表第 i 次抽到黑球，W_j 表示第 j 次抽到白球



$$P(X=1)=P(W_1)=\frac{1}{4}$$

$$P(X=2)=P(B_1W_2)=P(B_1)\times P(W_2|B_1)$$
$$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}$$
$$=\frac{1}{4}$$

$$P(X=3)=P(B_1B_2W_3)=P(B_1)\times P(B_2\,|\,B_1)\times P(W_3\,|\,B_2B_1)$$
$$=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$P(X=4)=P(B_1B_2B_3W_4)=P(B_1)\times P(B_2|B_1)\times P(B_3|B_2B_1)\times P(W_4|B_3B_2B_1)$$
$$=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 1$$
$$=\frac{1}{4}$$

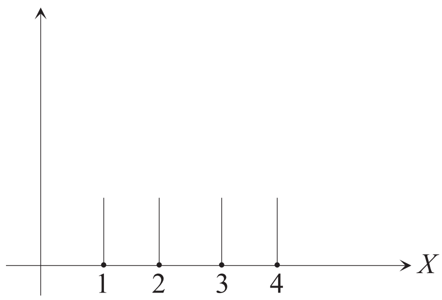
所以，X 之機率函數為

X	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

或以公式表示為

$$f(x)=\frac{1}{4}\text{，}x=1,2,3,4$$

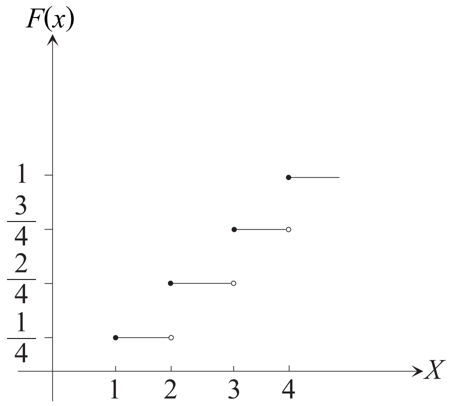
或以圖表示為



⑵ X 之累積分配分別以表、公式及圖表示如下

X	1	2	3	4
$F(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ \frac{1}{4} & 1\le x<2 \\ \frac{2}{4} & 2\le x<3 \\ \frac{3}{4} & 3\le x<4 \\ 1 & 4\le x \end{cases}$$



6.4 某生產線上的品質資料顯示，不良品的比例有$\frac{1}{10}$，若品檢人員從生產線上隨機抽取 3 個樣本，以 X 代表這組樣本中不良品的個數

⑴樣本空間與 X 間之關係。

⑵以表呈現 X 之機率函數。

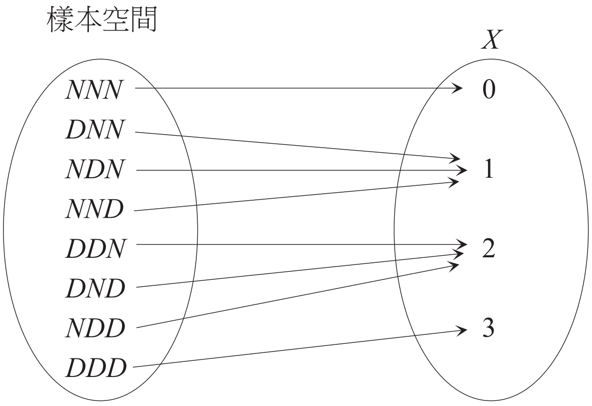
⑶以圖呈現 X 之機率函數。

⑷以表呈現 X 之累積分配。

⑸以圖呈現 X之累積分配。

解：

⑴以 N 表示良品，D 表示不良品，則樣本空間與 X 之關係為



(2) $P(X=0)=P(NNN)=(0.9)^3=\frac{3!}{0!\,3!}(0.1)^0(0.9)^3=0.729$

$P(X=1)=P(DNN, NDN, NND)=\frac{3!}{1!\,2!}(0.1)^1(0.9)^2=0.243$

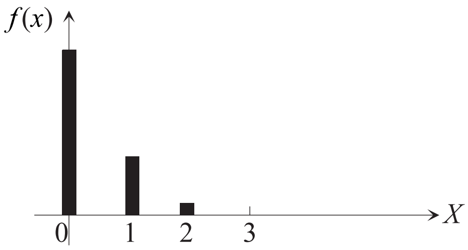
$P(X=2)=P(DDN, DND, NDD)=\frac{3!}{2!\,1!}(0.1)^2(0.9)^1=0.027$

$P(X=3)=P(DDD)=\frac{3!}{3!\,0!}(0.1)^3(0.9)^0=0.001$

所以，X 之機率函數為

X	0	1	2	3
$f(x)$	0.729	0.243	0.027	0.001

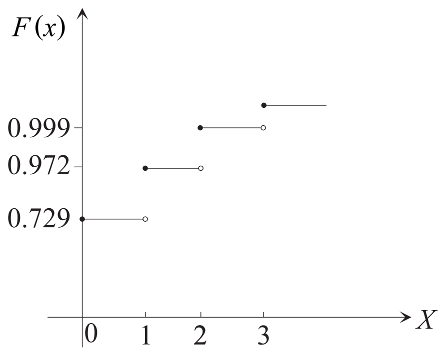
(3)



(4) X 之累積分配為

X	0	1	2	3
$F(x)$	0.729	0.972	0.999	1.000

⑸



6.5 麥當勞 24 小時速食店共有 10 名男性員工及 5 名女性員工，領班從其中隨機抽取 5 名員工安排為農曆除夕夜班工作，X 表示這 5 名員工中女性員工的人數

⑴ X 的機率函數？

⑵ X 的累積分配？

解：

⑴ $P(X=0)=\dfrac{\binom{10}{5}}{\binom{15}{5}}=0.0839$

$P(X=1)=\dfrac{\binom{5}{1}\binom{10}{4}}{\binom{15}{5}}=0.3496$

$P(X=2)=\dfrac{\binom{5}{2}\binom{10}{3}}{\binom{15}{5}}=0.3996$

$P(X=3)=\dfrac{\binom{5}{3}\binom{10}{2}}{\binom{15}{5}}=0.1499$

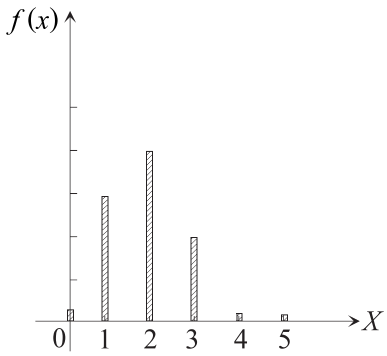
$P(X=4)=\dfrac{\binom{5}{4}\binom{10}{1}}{\binom{15}{5}}=0.0167$

$P(X=5)=\dfrac{\binom{5}{5}}{\binom{15}{5}}=0.003$

所以 X 之機率函數分別以公式、表、圖表示為

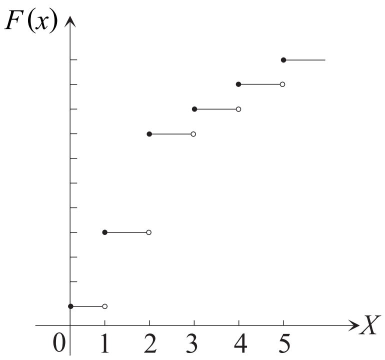
$$f(X=x)=\frac{\binom{5}{x}\binom{10}{5-x}}{\binom{15}{5}}，x=0,1,2,3,4,5$$

X	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.0839	0.3496	0.3996	0.1499	0.0167	0.003



⑵ X 的累積分配以表及圖表示如下

X	0	1	2	3	4	5
$F(x)$	0.0839	0.4335	0.8331	0.983	0.9997	1.000

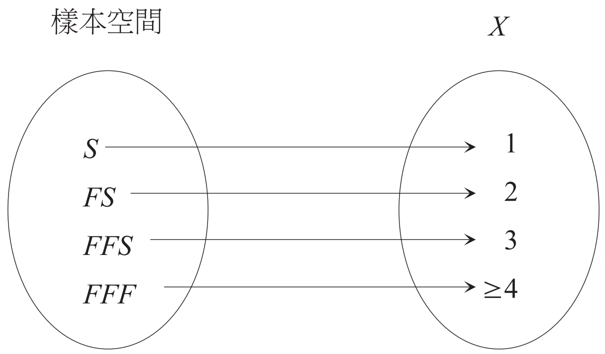


6.6 某生化實驗室接受某製藥廠的委託進行某項實驗，這項實驗若失敗則再執行直到成功為止，但由於每次實驗花費成本甚高，所以，最多進行 3 次。每次實驗的成本為

80,000,000，若成功則藥廠將支付生化實驗室 160,000,000，否則無任何回收，如果每次實驗成功的機率皆為 0.9 且相互獨立，X 表示實驗成功所需執行的實驗次數
⑴ X 的機率函數？
⑵生化實驗室的期望利潤？

解：

⑴以 S 表示成功，F 表示失敗，則樣本空間與 X 之關係為

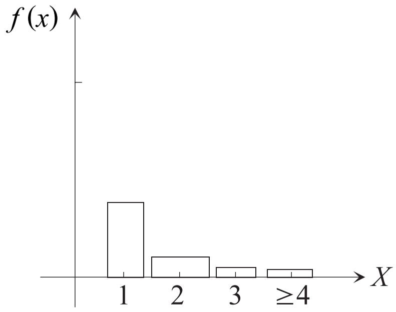


$$P(X=1)=P(S)=0.9$$
$$P(X=2)=P(FS)=0.1\times 0.9=0.09$$
$$P(X=3)=P(FFS)=(0.1)^2\times 0.9=0.009$$
$$P(X\geq 4)=1-P(X=1)-P(X=2)-P(X=3)=0.001$$

所以 X 的機率函數分別以公式、表及圖表示如下

$$f(x)=\begin{cases}(0.1)^{x-1}(0.9) & x=1,2,3\\ 0.001 & x\geq 4\end{cases}$$

X	1	2	3	≥ 4
$f(x)$	0.9	0.09	0.009	0.001



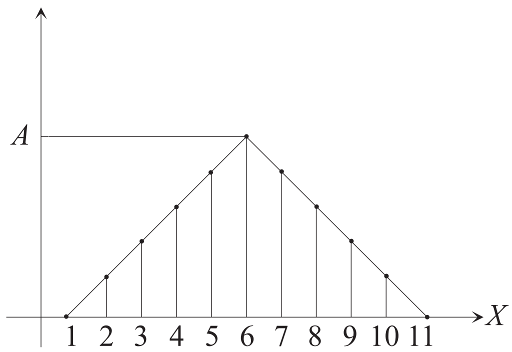
⑵以 P 表示利潤，則 X 與 P 間的關係為

$$
\begin{array}{ccl}
X & & P \\
1 & \longrightarrow & 160,000,000-80,000,000=80,000,000 \\
2 & \longrightarrow & 160,000,000-2\times 80,000,000=0 \\
3 & \longrightarrow & 160,000,000-3\times 80,000,000=-80,000,000 \\
\geq 4 & \longrightarrow & 0-3\times 80,000,000=-240,000,000
\end{array}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
E(P) &= \Sigma\, p(x) f(x) \\
&= 80,000,000\times 0.9+0\times 0.09+(-80,000,000)\times 0.009 \\
&\quad +(-240,000,000)\times 0.001 \\
&= 71,040,000
\end{aligned}
$$

6.7　間斷隨機變數 X 的機率函數如下圖



(1) $A=$？

(2) X 的累計分配？

(3) $P(4<x\leq 9)=$？

解：

(1)連接 $(1,0)$，$(6,A)$ 的直線方程式為

$$y=\frac{A}{5}(x-1)$$

同理，連接 $(6,A)$，$(11,0)$ 的直線方程式為

$$y=\frac{-A}{5}(x-11)$$

所以我們可以設 X 之機率函數 $f(x)$ 為

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{5}(x-1) & x=1,2,3,4,5\\ A & x=6\\ -\dfrac{A}{5}(x-11) & x=7,8,9,10,11\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{11} f(x)&=\sum_{x=1}^{5}\frac{A}{5}(x-1)+\sum_{x=7}^{11}-\frac{A}{5}(x-11)+A\\ &=2\left(\sum_{x=1}^{5}\frac{A}{5}(x-1)\right)+A\text{（∵對稱性）}\\ &=\frac{2A}{5}\left(\sum_{x=1}^{5}(x-1)\right)+A\\ &=\frac{2A}{5}\left(\sum_{x=1}^{5}x-5\right)+A\\ &=\frac{2A}{5}\cdot\left(\frac{5\times 6}{2}-5\right)+A\\ &=5A\\ &=1\end{aligned}$$

所以 $A=\frac{1}{5}$，X 的機率函數為

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(x)$	0	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	0

⑵ X的累計分配為

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$F(x)$	0	$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{10}{25}$	$\frac{15}{25}$	$\frac{19}{25}$	$\frac{22}{25}$	$\frac{24}{25}$	$\frac{25}{25}$	1

⑶ $P(4 \leq x \leq 9) = F(9) - F(4) + f(4)$

$$= \frac{24}{25} - \frac{6}{25} + \frac{3}{25}$$

$$= \frac{21}{25}$$

6.8 間斷隨機變數 X 的機率函數為

$$f(x) = \frac{A}{x}, \quad x = 1, 2, 3, 4, 5$$

⑴ $A =$?

⑵ X 的期望值?

解：

⑴ $\sum_x f(x) = \sum_{x=1}^{5} \frac{A}{x}$

$$= A\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{137}{60} A$$

$$= 1$$

所以，$A = \frac{60}{137}$

⑵ X的機率函數為

X	1	2	3	4	5
$f(x)$	$\frac{60}{137}$	$\frac{30}{137}$	$\frac{20}{137}$	$\frac{15}{137}$	$\frac{12}{137}$

$$\begin{aligned}E(x)&=1\times\frac{60}{137}+2\times\frac{30}{137}+3\times\frac{20}{137}+4\times\frac{15}{137}+5\times\frac{12}{137}\\&=\frac{300}{137}\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}E(x)&=\sum_x x\cdot f(x)\\&=\sum_x x\cdot\frac{A}{x}\\&=\sum_x A\\&=5A\\&=\frac{300}{137}\end{aligned}$$

6.9 隨機變數 X 的機率函數 $f(x)=kx$，$x=1,2,3,4,5$

(1) $k=$ ？

(2)計算 $P(X\geq 3)=$ ？

(3)計算 X 之期望值？

(4)計算 X 之變異數？

解：

(1) X 之機率分配如下

X	1	2	3	4	5
$f(x)$	k	2k	3k	4k	5k

由定義 6-2-2，

$$\sum f(x)=15k=1$$

所以，$k=\dfrac{1}{15}$

(2)$P(X\geq 3)=f(3)+f(4)+f(5)=12k=\dfrac{12}{15}$

(3)$E(X)=\Sigma\, x\cdot f(x)$

$$=1\times k+2\times(2k)+3\times(3k)+4\times(4k)+5\times(5k)$$
$$=55k$$
$$=\frac{55}{15}$$
$$=\frac{11}{3}$$

(4)$V(X)=E[(X-E(X))^2]$

$$=(1-\frac{11}{3})^2\times\frac{1}{15}+(2-\frac{11}{3})^2\times\frac{2}{15}+(3-\frac{11}{3})^2\times\frac{3}{15}+(4-\frac{11}{3})^2$$
$$\times\frac{4}{15}+(5-\frac{11}{3})^2\times\frac{5}{15}$$
$$=\frac{14}{9}$$

或

$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$

$$=15-(\frac{11}{3})^2$$
$$=\frac{14}{9}$$

其中$E(X^2)=1^2\times k+2^2\times 2k+3^2\times 3k+4^2\times 4k+5^2\times 5k=225k=15$

6.10 隨機變數 X 的機率函數為

X	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$

(1)計算 X 之期望值？

(2)計算 X 之變異數？

(3)計算 $(X-2)^2$ 之期望值？

解：

(1)$E(X)=\Sigma x \cdot f(x)$

$$=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{2}+2\times 0+3\times\frac{1}{6}$$

$$=1$$

(2)$V(X)=E[(X-\mu)^2]$

$$=\Sigma (x-\mu)^2 \cdot f(x)$$

$$=(0-1)^2\times\frac{1}{3}+(1-1)^2\times\frac{1}{2}+(2-1)^2\times 0+(3-1)^2\times\frac{1}{6}$$

$$=1$$

或

$E(X^2)=\Sigma x^2 \cdot f(x)$

$$=0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times 0+3^2\times\frac{1}{6}$$

$$=2$$

$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=2-1=1$

(3)$E[(x-2)^2]=\Sigma (x-2)^2 \cdot f(x)$

$$=(0-2)^2\times\frac{1}{3}+(1-2)^2\times\frac{1}{2}+(2-2)^2\times 0+(3-2)^2\times\frac{1}{6}$$

$$=2$$

或

$E[(X-2)^2]=E(X^2-4X+4)$

$$=E(X^2)-4E(X)+4$$

$$=2-4+4$$

$$=2$$

6.11 有一個投擲三個硬幣的賭局⑴若出現三個反面，賭場付給賭客 100 元，⑵若出現三個正面，賭場付給賭客 60 元，⑶若出現一個正面，賭客付賭場 20 元，⑷若出現二個正面，賭客付賭場 30 元，這場賭局看起來對賭客有利，因此吸引了許多賭徒參與，殊不知莊家在一個硬幣中動了手腳，這枚硬幣的兩面都是正面，但由於某種偽裝術致使賭徒不易察覺。

⑴賭徒對這場賭局的看法如何？

⑵莊家對這場賭局的看法如何？

解：

⑴以 X 代表正面的次數，則由於賭徒並未察覺其中一枚硬幣有弊，所以賭徒心中 X 的機率分配為

X	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
報酬	100	-20	-30	60

$$E(X)=100\times\frac{1}{8}+(-20)\times\frac{3}{8}+(-30)\times\frac{3}{8}+60\times\frac{1}{8}$$
$$=\frac{10}{8}$$

所以，賭徒認為這場賭局的期望值為 $\frac{10}{8}$，有利於賭徒。

⑵在莊家的心中，X 的機率分配為

X	0	1	2	3
$f(x)$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
	-100	20	30	-60

$$P(X=0)=0$$

$$P(X=1)=P(HTT)=1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$P(X=2)=P(HHT\text{ 或 }HTH)=1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$P(X=3)=P(HHH)=1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

所以，莊家心中的期望值為

$$\begin{aligned}E(X)&=(-100)\times 0+20\times\frac{1}{4}+30\times\frac{1}{2}+(-60)\times\frac{1}{4}\\&=0+5+15-15\\&=5\end{aligned}$$

6.12 隨機變數 X 的機率函數為

X	-3	-1	0	1	2	3	5	8
$f(x)$	0.1	0.2	0.15	0.2	0.1	0.15	0.05	0.05

(1)計算 X 為負值的機率？

(2)計算在 $X\leq 0$ 的前提下，$X=-3$ 之機率？

(3)計算在 $X>0$ 的前提下，$X\geq 3$ 之機率？

(4)計算 $E(3X-5)$？

解：

(1) P（X 為負）$=f(-3)+f(-1)$
$=0.1+0.2$
$=0.3$

(2) $$P(X=-3\mid X\leq 0)=\frac{P(X=-3)}{P(X\leq 0)}=\frac{0.1}{0.1+0.2+0.15}=\frac{2}{9}$$

(3) $$P(X\geq 3\mid X>0)=\frac{P(X\geq 3)}{P(X>0)}=\frac{0.15+0.05+0.05}{0.2+0.1+0.15+0.05+0.05}$$

$$= \frac{5}{11}$$

(4)$E(X) = \Sigma\, x \cdot f(x)$

$$= (-3) \times 0.1 + (-1) \times 0.2 + 0 \times 0.15 + 1 \times 0.2 + 2 \times 0.1 + 3 \times 0.15 + 5 \times 0.05 + 8 \times 0.05$$

$$= 1$$

$$E(3X-5) = 3\,E(X) - 5$$

$$= 3 - 5$$

$$= -2$$

6.13 某位同學的舊機車要換新機車，車行同意以 13,000 元收購這部舊車，但這位同學認為，若他在校園網路上張貼廣告，有 20%的機會他可以 16,000 元的價格賣掉舊車，同時他也認為若他在雅虎（Yahoo.com）拍賣網站上張貼廣告，有 75%的機會他可以 16,000 元的價格賣掉它，但若雅虎要收取網路服務費 1,000 元，請問這位同學應該上雅虎拍賣網賣他這部舊機車嗎？

解：

這位同學不上雅虎拍賣網有兩種結果，其機率分配如下

	車行收購	校園網路上成交
$f(x)$	0.8	0.2
X	13,000	16,000

所以，他不上雅虎拍賣網的回收期望值為

$$E(X) = 13{,}000 \times 0.8 + 16{,}000 \times 0.2$$

$$= 13{,}600$$

這位同學若上雅虎拍賣網也有兩種結果，分別如下

	車行收購	雅虎拍賣網售出
$f(x)$	0.25	0.75
X	13,000	16,000

所以他上雅虎拍賣網的回收期望值為

$$E(X)=13{,}000\times 0.25+16{,}000\times 0.75=15{,}250$$

$$15{,}250-1{,}000=14{,}250>13{,}600$$

所以，他應該上雅虎拍賣網。

6.14 連續隨機變數 X 之機率密度函數 $f(x)$ 為

$$f(x)=3x^2，0\le x\le 1$$

(1) X 之累積分配 $F(x)$？

(2)若 $P(X\le a)=\frac{1}{4}$，則 $a=$？

(3) X 之期望值及變異數？

解：

(1)
$$\begin{aligned}F(x)&=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\\&=\int_{0}^{x} 3t^2\,dt\\&=t^3\Big|_0^x\\&=x^3\end{aligned}$$

所以，X 的累積分配 $F(x)$ 為

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^3 & 0\le x\le 1\\ 1 & 1<x\end{cases}$$

(2)
$$\begin{aligned}P(X\le a)&=F(a)\\&=a^3\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{4}$$

所以 $a=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\doteqdot 0.63$

(3) $$\begin{aligned}E(X)&=\int_0^1 xf(x)dx\\&=\int_0^1 3x^3\,dx\\&=\frac{3}{4}x^4\Big|_0^1\\&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(X)&=E(X^2)-E(X)^2\\&=\int_0^1 3x^4\,dx-(\frac{3}{4})^2\\&=\frac{3}{5}x^5\Big|_0^1-(\frac{3}{4})^2\\&=\frac{3}{80}\end{aligned}$$

6.15 連續隨機變數 X 的機率密度函數為

$$f(x)=3x^2，-1\le x\le 0$$

(1) X 之期望值？

(2) X 之變異數？

(3) $P(X>-\frac{1}{2}\,|\,X<-\frac{1}{4})=$ ？

解：

(1) $$\begin{aligned}E(X)&=\int_{-1}^0 3x^3\,dx\\&=\frac{3}{4}x^4\Big|_{-1}^0\\&=-\frac{3}{4}\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}E(X^2)&=\int_{-1}^0 3\,x^4\,dx\\&=\frac{3}{5}x^5\Big|_{-1}^0\end{aligned}$$

$$=\frac{3}{5}$$

所以，$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$

$$=\frac{3}{5}-(-\frac{3}{4})^2$$

$$=\frac{3}{80}$$

(3)$P(X>-\frac{1}{2}\Big|X<-\frac{1}{4})=\dfrac{P(-\frac{1}{2}<X<-\frac{1}{4})}{P(X<-\frac{1}{4})}$

$$=\frac{\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{4}}3x^2\,dx}{\int_{-1}^{-\frac{1}{4}}3x^2\,dx}$$

$$=\frac{\frac{7}{64}}{\frac{63}{64}}$$

$$=\frac{7}{63}$$

6.16 連續隨機變數 X 的機率密度函數為

$$f(x)=\begin{cases} ax & 0\le x<1 \\ a & 1\le x<2 \\ -ax+3a & 2\le x<3 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(1)$a=$？

(2)求 X 之累積分配 $F(x)$，並作圖。

解：

(1) $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=\int_0^1 axdx+\int_1^2 adx+\int_2^3(-ax+3a)dx$

$$=\frac{1}{2}ax^2\Big|_0^1+ax\Big|_1^2+(-\frac{a}{2}x^2+3ax)\Big|_2^3$$

$$=2a$$

$$=1$$

所以，$a=\frac{1}{2}$

⑵分段計算 X 之累積分配如下

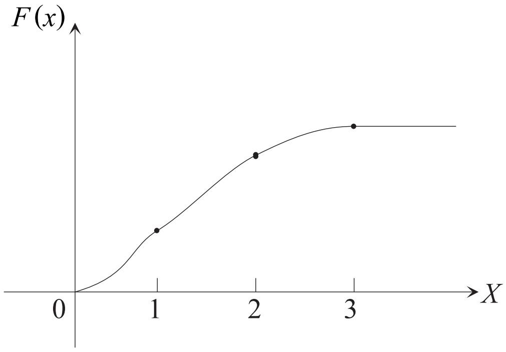
$$F(x)=0 \qquad x<0$$

$$F(x)=\int_o^x \frac{1}{2}tdt$$
$$=\frac{x^2}{4} \qquad 0\le x<1$$

$$F(x)=\frac{1}{2}+\int_1^x \frac{1}{2}dt$$
$$=\frac{x}{2}-\frac{1}{4} \qquad 1\le x<2$$

$$F(x)=\frac{3}{4}+\int_2^x \left(-\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}\right)dt$$
$$=\frac{x^2}{4}+\frac{3}{2}x-\frac{5}{4} \qquad 2\le x<3$$

$$F(x)=1 \qquad 3\le x$$



6.17 假設某晶片的壽命（以月為單位）以 X 表示，X 之機率密度函數為

$$f(x)=\begin{cases}\frac{100}{x^2} & x>100\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

⑴如果有一晶片在使用 150 個月後仍然沒壞，則其壽命少於 200 個月的機率為？

⑵若某一電子裝備中有三個這種晶片，則在使用 150 個月之內，恰巧有一個需更換的機率？

解：

⑴$$P(X<200 \mid X>150)=\frac{P(150<X<200)}{P(X>150)}$$

$$=\frac{P(150<X<200)}{1-P(X<150)}$$

$$=\frac{\int_{150}^{200}\frac{100}{x^2}dx}{1-\int_{100}^{150}\frac{100}{x^2}dx}$$

$$=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{1}{4}$$

⑵ P（壽命不到 150 月）$=P(X<150)=\int_{100}^{150}\frac{100}{x^2}dx=\frac{1}{3}$

P（壽命超過 150 月）$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

所以，三個晶片中恰巧一個需更換的機率為

$$\binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2=3\times\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{9}$$

6.18 連續隨機變數 X 的機率密度函數為

$$f(x)=\frac{x}{2}，0\le x\le 2$$

X_1, X_2, X_3 為三個 X 之隨機觀測值

⑴$P(X_1>1)=$？

⑵$P(X_1>1$ 且 $X_2>1)=$？

⑶X_1, X_2, X_3 三值中有兩個大於 1 的機率。

解：

(1)X_1 為 X 之觀測值，則 X_1 之機率分配與 X 相同，所以

$$\begin{aligned} P(X_1>1) &= \int_1^2 f(x)\,dx \\ &= \int_1^2 \frac{x}{2}\,dx \\ &= \frac{x^2}{4}\Big|_1^2 \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(2)因為 X_1 與 X_2 為 X 之隨機觀測值，則 X_1 與 X_2 互為獨立，所以

$$\begin{aligned} P(X_1>1 \text{ 且 } X_2>1) &= P(X_1>1)\cdot P(X_2>1) \\ &= \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} \\ &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$

(3) P（三個中有兩個大於 1）

$$\begin{aligned} &= \binom{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{27}{64} \end{aligned}$$

6.19 隨機變數 X 之機率密度函數為

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1) & 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(1)計算 X 之期望值。

(2)計算 X 之變異數。

(3)計算 $g(X)=X^2+X-2$ 之期望值。

解：

(1)
$$\begin{aligned} E(X) &= \int_1^2 2x(x-1)\,dx \\ &= 2\int_1^2 (x^2-x)\,dx \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

(2) $V(X)=E[(X-\frac{5}{3})^2]$

$$=E(X^2-\frac{10}{3}X+\frac{25}{9})$$

$$=\int_1^2 2(x^2-\frac{10}{3}x+\frac{25}{9})(x-1)\,dx$$

$$=2\int_1^2 (x^3-\frac{13}{3}x^2+\frac{55}{9}x-\frac{25}{9})\,dx$$

$$=\frac{1}{18}$$

或 $V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{17}{6}-\frac{25}{9}=\frac{1}{18}$

$$E(X^2)=\int_1^2 2x^2(x-1)\,dx$$

$$=2\int_1^2 (x^3-x^2)\,dx$$

$$=\frac{17}{6}$$

(3) $E(g(X))=E(X^2+X-2)$

$$=E(X^2)+E(X)-2$$

$$=\frac{17}{6}+\frac{5}{3}-2$$

$$=\frac{5}{2}$$

6.20 連續函數 $f(x)$ 為

$$f(x)=\begin{cases}\frac{24}{x^3} & 3\le x\le 6\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

(1)請驗證 $f(x)$ 是否可成為一個機率密度函數。

(2)若(1)成立，則 X 之期望值為何？

解：

(1)首先驗證 $f(x)$ 在隨機變數定義域內為非負值

$$f(x)=\frac{24}{x^3}\ge 0\text{，}3\le x\le 6$$

然後再驗證$f(x)$在隨機變數定義域內積分值＝1

$$\int_3^6 \frac{24}{x^3}\,dx = -\frac{12}{x^2}\Big|_3^6$$
$$= -\frac{12}{36}+\frac{12}{9}$$
$$=1$$

所以，$f(x)$夠資格作為一個機率密度函數。

(2)$E(X) = \int_3^6 x \cdot f(x)\,dx$

$$= \int_3^6 x \cdot \frac{24}{x^3}\,dx$$
$$= \int_3^6 \frac{24}{x^2}\,dx = -\frac{24}{x}\Big|_3^6 = 4$$

6.21 驗證下述連續函數$f(x)$是否可成為機率密度函數

$$f(x)=\begin{cases} A-(x-1)^2 & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

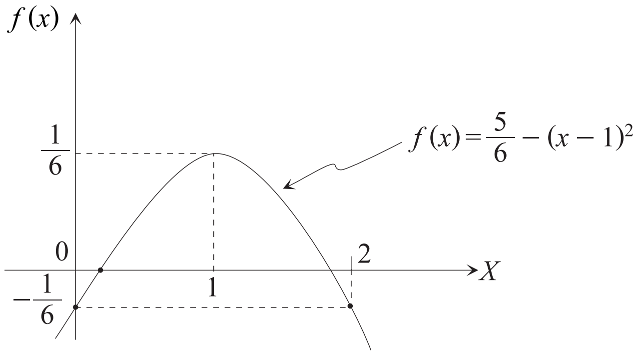
解：

先解出A值

$$\int_0^2 [A-(x-1)^2]\,dx = \int_0^2 (A-x^2+2x-1)\,dx$$
$$=(A-1)x-\frac{x^2}{3}+x^2\Big|_0^2$$
$$=2(A-1)+\frac{4}{3}$$
$$=1$$

所以，$A=\frac{5}{6}$

其次，再驗證機率密度函數的非負性



由 $f(x)=\frac{5}{6}-(x-1)^2$ 之函數圖形，很明顯可以看到在〔0, 2〕內 $f(x)\geq 0$ 並不恆成立，所以，$f(x)$ 不可能成為一個機率密度函數。

6.22 連續隨機變數 X 之累積分配函數 $F(x)$ 為

$$F(x)=\begin{cases} 0 & , \ x<-2 \\ k(x+2) & , \ -2\leq x<3 \\ 1 & , \ 3\leq x \end{cases}$$

(1) $k=$ ？

(2) $P(1\leq X\leq \frac{5}{2})=$ ？

(3) X 之機率密度函數？

(4) $P(X=2)=$ ？

解：

(1)當 $X=3$ 時

$$F(3)=k(3+2)=1\text{，所以 }k=\frac{1}{5}$$

(2)
$$\begin{aligned} P(1\leq X\leq \tfrac{5}{2}) &= F(\tfrac{5}{2})-F(1) \\ &= \frac{9}{10}-\frac{3}{5} \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

(3) X 之機率密度函數 $f(x)$ 與累計分配函數 $F(x)$ 之關係為

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{d}{dx}F(x) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{5}(x+2)\right) \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

所以 X 之機率密度函數為

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{5} & -2 \le x \le 3 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(4)連續隨機變數單一值機率為 0，所以 $P(X=2)=0$

6.23 連續型隨機變數 X，它的機率密度函數 $f(x)$ 為

$$f(x)=\begin{cases} 0.2-0.4x, & 0<x\le 5 \\ 0.2+0.4x, & -5<x\le 0 \end{cases}$$

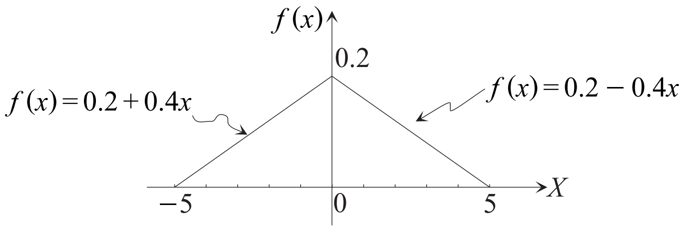
(1)計算 $P(X\le 0)$。

(2)計算 $P(X\ge 2)$。

(3)計算 $P(0\le X\le 3)$。

(4)計算 $P(-2\le X\le 2)$。

解：



(1)因為機率密度函數 $f(x)$ 具對稱性，所以 $P(X\le 0)=\dfrac{1}{2}$

(2)$P(X\ge 2)=\int_2^5 f(x)\,dx=\int_2^5 (0.2-0.4x)\,dx=0.18$

(3) $P(0 \le X \le 3) = \int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 (0.2 - 0.4x)\,dx = 0.42$

(4) $P(-2 \le X \le 2) = \int_{-2}^2 f(x)\,dx = \int_{-2}^2 (0.2 + 0.4x)\,dx + \int_0^2 (0.2 - 0.4x)\,dx$

$= 0.32 + 0.32$

$= 0.64$

（註）也可以從三角形面積公式及對稱性計算上述諸機率。

6.24 X, Y 兩隨機變數的聯合機率分配如下：

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

(1) $Z = X + Y$ 的機率分配。

(2) 計算 $E(X), E(Y), E(XY)$ 及 $\mathrm{Cov}(X, Y)$。

(3) $V(3X - 4Y) =$ ？

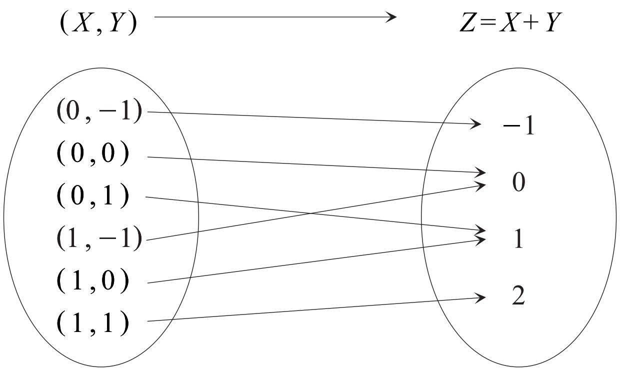
(4) $\mathrm{Cov}(X - Y, X) =$ ？

解：

首先將 X, Y 的邊際機率算出

$X \backslash Y$	-1	0	1	
0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	

(1) Z 與 X, Y 間的關係為



$$P(Z=-1)=P\{(0,-1)\}=0$$
$$P(Z=0)=P\{(0,0),(1,-1)\}$$
$$=P\{(0,0)\}+P\{(1,-1)\}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$$
$$P(Z=1)=P\{(0,1),(1,0)\}=\frac{1}{6}+0=\frac{1}{6}$$
$$P(Z=2)=P\{(1,1)\}=\frac{1}{3}$$

所以，Z 的機率分配為

Z	0	1	2
$f(z)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

(2) $E(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$$
$$=(0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3})-(\frac{2}{3})^2=\frac{2}{9}$$
$$E(Y)=(-1)\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$
$$V(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2$$
$$=(1\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2})-(\frac{1}{6})^2$$

$$=\frac{29}{36}$$

$$E(XY)=(0)(-1)\times 0+(0)(0)\times\frac{1}{6}+(0)(1)\times\frac{1}{6}+(1)(-1)\times\frac{1}{3}+(1)(0)\times 0$$
$$+(1)(1)\times\frac{1}{3}$$
$$=0$$

$$\text{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$
$$=0-(\frac{2}{3})(\frac{1}{6})=-\frac{1}{9}$$

(3) $V(3X-4Y)=9V(X)+16V(Y)-24\text{COV}(X,Y)$
$$=9\times\frac{2}{9}+16\times\frac{29}{36}-24(-\frac{1}{9})=\frac{632}{36}$$

(4) $\text{Cov}(X-Y,X)=E\left\{[(X-Y)-E(X-Y)][X-E(X)]\right\}$
$$=E\left\{[(X-E(X))-(Y-E(Y))][X-E(X)]\right\}$$
$$=E\left\{(X-E(X))^2-(X-E(X))(Y-E(Y))\right\}$$
$$=E[(X-E(X))^2]-E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$$
$$=V(X)-COV(X,Y)$$
$$=\frac{2}{9}-(-\frac{1}{9})=\frac{1}{3}$$

6.25　X, Y 兩隨機變數的聯合機率分配如下：

X \ Y	2	4
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
2	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
3	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$

(1) $P(X\geq 2)=$ ？

(2) $P(X+Y\leq 5)=$ ？

(3) $P(|X-Y|=1\,|\,X+Y\leq 5)=$ ？

(4) $E(X)=?\quad V(X)=?$

(5) $E(Y)=?\quad V(Y)=?$

(6) $E(X+Y)=?\quad V(X+Y)=?$

(7) $V(XY)=?$

(8) X 與 Y 是否獨立？

(9) $\mathrm{Cov}(X,Y)=?$

(10) $V(3X+2Y)=?$

解：

首先將 X,Y 的邊際機率算出

X \ Y	2	4	
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$
2	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{4}{12}$
3	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$
	$\frac{6}{12}$	$\frac{6}{12}$	

(1) $P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{4}{12}+\frac{4}{12}=\frac{8}{12}$

(2) $$\begin{aligned}P(X+Y\leq 5)&=P\left\{(1,2)\cup(1,4)\cup(2,2)\cup(3,2)\right\}\\&=P\left\{(1,2)\right\}+P\left\{(1,4)\right\}+P\left\{(2,2)\right\}+P\left\{(3,2)\right\}\\&=\frac{1}{12}+\frac{3}{12}+\frac{2}{12}+\frac{3}{12}=\frac{9}{12}\end{aligned}$$

(3) $$P(|X-Y|=1\mid X+Y\leq 5)=\frac{P(X+Y\leq 5\ \text{且}\ |X-Y|=1)}{P(X+Y\leq 5)}$$

$$=\frac{P\left\{(1,2)\cup(3,2)\cup(3,4)\right\}}{\frac{9}{12}}$$

$$=\frac{\frac{1}{12}+\frac{3}{12}+\frac{1}{12}}{\frac{9}{12}}=\frac{5}{9}$$

(4) $E(X)=1\times\frac{4}{12}+2\times\frac{4}{12}+3\times\frac{4}{12}=2$

$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$

$=(1\times\frac{4}{12}+4\times\frac{4}{12}+9\times\frac{4}{12})-2^2$

$=\frac{8}{12}$

(5) $E(Y)=2\times\frac{6}{12}+4\times\frac{6}{12}=3$

$V(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2$

$=(4\times\frac{6}{12}+16\times\frac{6}{12})-3^2$

$=1$

(6) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=2+3=5$

$V(X+Y)=E[(X+Y)^2]-E[(X+Y)]^2$

$=(9\times\frac{1}{12}+25\times\frac{3}{12}+16\times\frac{2}{12}+36\times\frac{2}{12}+25\times\frac{3}{12}+49\times\frac{1}{12})-5^2$

$=1$

(7) $E(XY)=2\times\frac{1}{12}+4\times\frac{3}{12}+4\times\frac{2}{12}+8\times\frac{2}{12}+6\times\frac{3}{12}+12\times\frac{1}{12}=\frac{68}{12}$

$V(XY)=E(X^2Y^2)-E(XY)^2$

$=(4\times\frac{1}{12}+16\times\frac{3}{12}+16\times\frac{2}{12}+64\times\frac{2}{12}+36\times\frac{3}{12}+144\times\frac{1}{12})-(\frac{68}{12})^2$

$=\frac{944}{144}$

(8)不獨立，因為 $P(X=x, Y=y)\neq P(X=x)\cdot P(Y=y)$，例如 $P(X=1, Y=2)=\frac{1}{12}$，

但是 $P(X=1)\cdot P(Y=2)=\frac{4}{12}\times\frac{6}{12}=\frac{24}{144}=\frac{2}{12}$

(9) $\text{Cov}(X, Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$$=\frac{68}{12}-6=-\frac{4}{12}$$

⑽ $V(3X+2Y)=9V(X)+4V(Y)+12\,Cov(X,Y)$

$$=9\times\frac{8}{12}+4\times1+12\times(-\frac{4}{12})$$

$$=6$$

6.26 X, Y 兩隨機變數的機率函數分別為

X	$f(x)$
0	0.1
1	0.3
2	0.4
3	0.2

Y	$g(y)$
2	0.2
4	0.4
6	0.3
8	0.1

⑴請找出 X, Y 兩隨機變數的關係。

⑵分別計算 $E(X), V(X), E(Y), V(Y)$。

⑶以⑴所找到的關係式來驗證⑵的結果。

解：

⑴因為 $P(X=0)=P(Y=8)=0.1$

$P(X=1)=P(Y=6)=0.3$

$P(X=2)=P(Y=4)=0.4$

$P(X=3)=P(Y=2)=0.2$

所以，Y 與 X 的函數對應關係如下

所以　$Y=8-2X$

⑵$E(X)=\Sigma xf(x)$

$=0\times 0.1+1\times 0.3+2\times 0.4+3\times 0.2$

$=1.7$

$E(X^2)=\Sigma x^2 f(x)$

$=0^2\times 0.1+1^2\times 0.3+2^2\times 0.4+3^2\times 0.2$

$=3.7$

所以$V(X)=3.7-(1.7)^2=3.7-2.89=0.81$

$E(Y)=\Sigma yg(y)$

$=2\times 0.2+4\times 0.4+6\times 0.3+8\times 0.1$

$=4.6$

$E(Y^2)=\Sigma y^2 f(y)$

$=4\times 0.2+16\times 0.4+36\times 0.3+64\times 0.1$

$=24.4$

$V(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2$

$=24.4-(4.6)^2$

$=24.4-21.16$

$=3.24$

⑶ $E(X)=1.7$，$V(X)=0.81$，則在 $Y=8-2X$ 關係下

根據定理　$E(a+bX)=a+bE(X)$ 則

$E(Y)=E(8-2X)=8-2E(X)$

$=8-2\times 1.7$

$=8-3.4$

$=4.6$

又根據定理　$V(a+bX)=b^2V(X)$，則

$$
\begin{aligned}
V(Y) &= V(8-2X) = 4V(X) \\
&= 4 \times 0.81 \\
&= 3.24
\end{aligned}
$$