1h155.tpf-1 5/9/2002 15:26:45

第 5 章

機率導論

定義 *5-1-1*：試驗（或隨機試驗）（experiment or random experiment）

獲得某種結果（outcome）或衡量值（measurement）的活動，通稱為試驗。由於這種試驗的結果是無法預知的，又稱為隨機試驗。

定義 *5-1-2*：樣本空間（sample space）

隨機試驗的所有可能結果所形成的集合，我們稱它為該隨機試驗的樣本空間，以符號 S 表示之。

定義 *5-1-3*：樣本點（sample point）**或單一事件**（simple event or basic event）

樣本空間中的每一個單一元素稱之為樣本點或單一事件，以符號 e 表示之。

定義 *5-1-4*：事件（event）

樣本空間中某些樣本點的特定組合，我們稱為事件。以符號E表示之。

定義 *5-2-1*：可重複執行的隨機試驗（repeatable random experiment）

可以在完全相同的條件下反覆執行的隨機試驗，稱為可重複執行的隨機試驗。

定義 *5-2-2*：不可重複執行的隨機試驗（unrepeatable random experiment）

無法在完全相同的條件下重複執行的隨機試驗，稱為不可重複的隨機試驗。

定義 *5-3-1*：補集事件（complement of an event）

E 為隨機試驗中的事件，S 為樣本空間，則 $\overline{E}$ 為 E 事件的補集事件。它所代表的意義為 E 事件之外其他所有樣本點組成的事件。

定義 *5-3-2*：交集事件（intersection of two events）

E_1、E_2 分別為隨機試驗中的兩事件，則 $E_1 \cap E_2$ 為 E_1 與 E_2 的交集事件，它所代表的意義為同時在 E_1 及 E_2 兩事件集合中的樣本點所組成的事件。

定義 *5-3-3*：聯集事件（union of two events）

E_1、E_2 分別為隨機試驗中的兩事件，則 $E_1 \cup E_2$ 稱為 E_1 與 E_2 的聯集事件，它所代表的意義為 E_1 或 E_2 兩事件中所有樣本點所組成的事件。

定義 *5-3-4*：差集事件（difference of two events）

E_1、E_2 分別為隨機試驗中兩事件，則 $E_1 - E_2$ 稱為 E_1、E_2 的差集事件，它所代表的意義為在 E_1 中但卻不在 E_2 中的所有樣本點所組成的事件。

(1)$\overline{A} \cup A = S$

(2)$\overline{A} \cap A = \phi$

(3)$A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$

(4)$A - B = A \cap \overline{B} = A - (A \cap B)$

(5)$A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B)$

(6)$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(7)$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(8) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ 或 $\overline{\bigcup_{i} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i$

(9) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ 或 $\overline{\bigcap_{i} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i$

機率基本定律一：

若 E 為隨機試驗中之事件，且 $E=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，其中 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 為 n 個相異的樣本點。則事件 E 發生的機率 $P(E)$ 為

$$P(E)=P(e_1)+P(e_2)+\cdots+P(e_n)=\sum_{i=1}^{n}P(e_i)$$

其中 $P(e_i)$ 為 e_i 樣本點事件的機率

機率基本定律二：

若 E 為隨機試驗中之事件，S 為其樣本空間，則

(1) $0\leqq P(E)\leqq 1$

(2) $P(\phi)=0$

(3) $P(S)=1$

定理 *5-4-1*：機率加法法則（additive rules）

若 E_1、E_2 為隨機試驗中的兩事件，則

$$P(E_1\cup E_2)=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1\cap E_2)$$

定理 *5-4-2*：E_1、E_2 為隨機試驗中的事件，若 $E_1\cap E_2=\phi$，則

$$P(E_1\cup E_2)=P(E_1)+P(E_2)$$

定義 *5-4-1*：互斥事件（mutually exclusive event）

E_1、E_2 分別為隨機試驗中的兩件事，若 $E_1\cap E_2=\phi$，則我們稱這兩個事件為互斥事件。

定理 5-4-3：若 E_1、E_2、E_3 為隨機試驗中的三個事件，則：

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$

定理 5-4-4：若 E_1、E_2、E_3 為隨機試驗中的三個事件，且 E_1、E_2、E_3 為互斥事件，則

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)$$

定理 5-4-5：若 $\bar{E}$ 為隨機試驗中 E 事件的補集事件，則 $P(E) = 1 - P(\bar{E})$

定理 5-4-6：若 E_1、E_2 為隨機試驗中的兩個事件，則 $P(E_1 - E_2) = P(E_1) - P(E_1 \cap E_2)$

定義 5-5-1：聯合機率（joint probability）

同時以兩個或多個構面來呈現隨機試驗結果的機率，稱為聯合機率。

定義 5-5-2：邊際機率（marginal probability）

在聯合機率表或聯合機率分配中，經由加總（summation）而求得的單一屬性機率表或單一屬性機率分配稱之為邊際機率。

定義 5-5-3：條件機率（conditional probability）

E_1、E_2 為隨機試驗的兩事件，在已確知事件 E_2 已發生的前提下，求事件 E_1 發生的機率稱為條件機率，以符號 $P(E_1|E_2)$ 表示之。

$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

其中 $P(E_2) \neq 0$

定義 *5-5-4*：獨立事件（independent events）

E_1、E_2 為隨機試驗中的兩事件，若 $P(E_1|E_2)=P(E_1)$ 且 $P(E_2|E_1)=P(E_2)$，則稱E_1、E_2 為獨立事件。

定義 *5-5-5*：相依事件（dependent events）

兩事件E_1、E_2 不為獨立事件，便為相依事件。

定理 *5-5-1*：E_1、E_2 兩事件為獨立事件，若且唯若 $P(E_1\cap E_2)=P(E_1)\cdot P(E_2)$

定義 *5-5-6*：獨立事件

A、B、C 三事件為獨立事件之充要條件為

(1) $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

(2) $P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C)$

(3) $P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$

(4) $P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$

定理 *5-6-1*：機率乘法法則（multiplicative rules）

E_1、E_2 為隨機試驗中的兩事件，則

$$P(E_1\cap E_2)=P(E_1)\cdot P(E_2|E_1)$$

或

$$P(E_1\cap E_2)=P(E_2)\cdot P(E_1|E_2)$$

定理 *5-7-1*：貝氏定理（Bayes' theorem）

$$P(A_i|B_j)=\frac{P(A_i\cap B_j)}{P(B_j)}$$
$$=\frac{P(A_i\cap B_j)}{P(A_1\cap B_j)+\ldots+P(A_k\cap B_j)}$$

$$=\frac{P(A_i)P(B_j|A_i)}{P(A_1)P(B_j|A_1)+\cdots+P(A_k)P(B_j|A_k)}$$

定義 *5A-1-1*：基本集合運算的定義

$$x\in A\cup B \Longleftrightarrow x\in A \vee x\in B$$

$$x\in A\cap B \Longleftrightarrow x\in A \wedge x\in B$$

$$x\in A-B \Longleftrightarrow x\in A \wedge x\notin B$$

$$\Longleftrightarrow x\in A \wedge \sim(x\in B)$$

$$\Longleftrightarrow x\in A \wedge x\in \overline{B}$$

其中∨為「或」，∧為「且」，～為「非」或「否定」。

定義 *5A-1-2*：集合包含與相等

$A\subset B \Longleftrightarrow \forall x\in A$，則$x\in B$

$A=B \Longleftrightarrow A\subset B$且$B\subset A$

定義 *5A-2-1*：

(1)等冪律（idempotent laws）

$$A\cup A=A$$

$$A\cap A=A$$

(2)結合律（associative laws）

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

(3)交換律（commutative laws）

$$A\cup B=B\cup A$$

$$A\cap B=B\cap A$$

(4)分配律（distributive laws）

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

(5)單元律（identity laws）

$A \cup \phi = A$

$A \cup U = U$

$A \cap \phi = \phi$

$A \cap U = A$

(6)反身律（involution law）

$\overline{\overline{A}} = A$

(7)互補律（complement laws）

$A \cup \overline{A} = U$

$A \cap \overline{A} = \phi$

$\overline{U} = \phi$

$\overline{\phi} = U$

定理 *5A-2-1*： 棣莫根律（De Morgan's laws）

$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

定理 *5A-2-2*： (1)$(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$

$(A \cap B) \subset B \subset (A \cup B)$

(2)$(A - B) \subset A$

$(B - A) \subset B$

定理 *5A-3-1*： (1)$A \cap B = A - (A - B)$

(2)$A \cup (B - A) = A \cup B$

(3)$A - (A \cap B) = A - B$

(4)$A = A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B)$

(5)$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = (A \cap B) \cup (A - B)$

(6)$(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)$

$(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C) \cap (B \cup D)$

定理 ***5A-3-2***：（兩集合的包含關係）

$$
\begin{aligned}
A \subset B &\Longleftrightarrow A \cup B = B \\
&\Longleftrightarrow A \cap B = A \\
&\Longleftrightarrow A \cap \overline{B} = \phi \\
&\Longleftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}
\end{aligned}
$$

5.1 盒中有 n 個球，各標記 $1,2,3,\cdots,n$，隨機抽取兩球，則兩者連號的機率？

⑴放回。

⑵不放回。

解：

⑴放回

樣本空間有 $n\times n$ 種結果

	1	2	$\cdots$	n
1	$(1,1)$	$(1,2)$	$\cdots$	$(1,n)$
2	$(2,1)$	$(2,2)$	$\cdots$	$(2,n)$
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
n	$(n,1)$	$(n,2)$	$\cdots$	(n,n)

連號的情形有 $2(n-1)$ 種，所以在機會均等的原則下

$$P(\text{連號})=\frac{2(n-1)}{n\times n}$$

⑵不放回

樣本空間有 $n\times(n-1)$ 種結果，連號的情形有 $2(n-1)$ 種，所以在機會均等的原則下

$$P(\text{連號})=\frac{2(n-1)}{n(n-1)}=\frac{2}{n}$$

5.2 6 個正數，8 個負數中隨機抽取 4 數，然後將 4 數相乘，乘積為正數的機率？

⑴放回。

⑵不放回。

解：

⑴放回

樣本空間有 $14\times14\times14\times14$ 種結果

乘積為正數有三種情況(a)四數皆為正，(b)二正二負，(c)四數皆負

(a)四數皆正有 $6\times6\times6\times6$ 種結果

(b)二正二負有 $6\times6\times8\times8$ 種結果

(c)四數皆負有 $8\times8\times8\times8$ 種結果

所以

$$P\{\text{乘積為正}\}=P\{\text{四數皆正}\}+P\{\text{二正二負}\}+P\{\text{四數皆負}\}$$
$$=\frac{6^4+6^2 8^2+8^4}{14^4}$$

⑵不放回

樣本空間有 ${}_{14}C_4=\dfrac{14!}{10!\,4!}=1001$ 種結果

(a)四數皆正有 ${}_6C_4=\dfrac{6!}{4!\,2!}=15$ 種結果

(b)二正二負有 ${}_6C_2\cdot{}_8C_2=420$ 種結果

(c)四數皆負有 ${}_8C_4=70$ 種結果

所以

$$P\{\text{乘積為正}\}=\frac{15+420+70}{1001}=\frac{505}{1001}$$

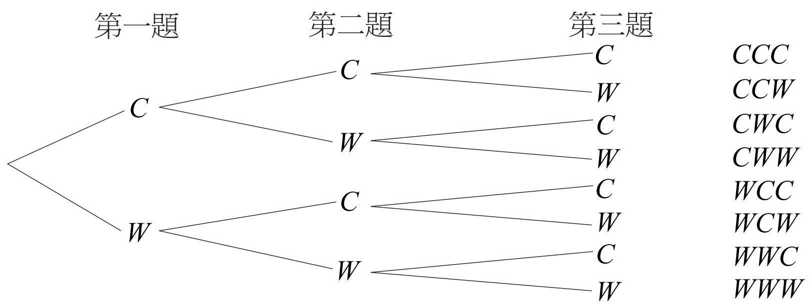
5.3 某次測驗中有三個選擇題，每題有 2 個答案，當你對題意完全不瞭解之下，請問你

⑴至少猜對一題的機率？

⑵猜對兩題的機率？

解：

若以 C 表示猜對 W 表示猜錯，則本題的樣本空間共有 CCC，…等 8 種結果。



由於每題只有兩個答案，所以猜對與猜錯的機率各半，所以樣本空間中每個樣本點的機率皆相等$\left(\frac{1}{8}\right)$。

⑴令A表示全猜錯，則$A=\{WWW\}$，則$P(A)=\frac{1}{8}$，$\overline{A}$表示「至少猜對一題」事件，所以

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

⑵P（猜對兩題）

$=P\{CCW, CWC, WCC\}$

$=P\{CCW\}+P\{CWC\}+P\{WCC\}$

$=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$

$=\frac{3}{8}$

（註）請特別注意，若每題不只兩個答案，每題猜對與猜錯的機率不相等，則樣本空間中每種結果發生的機率也就不會相等，請參考第 6 章二項分配。

5.4 公司設計部門 9 位工程師中，4 位未婚，3 位已婚，2 位離婚。從 9 位中隨機挑選 3 位出差，令X_1代表入選者中未婚人數，X_2代表入選者中已婚人數，X_3代表入選者中離婚人數

⑴編製X_1及X_2的聯合機率表。

⑵編製X_2及X_3的聯合機率表。

解：

⑴X_1的可能值為 0 , 1 , 2 , 3。

X_2的可能值為 0 , 1 , 2 , 3。

X_1及X_2的可能組合為

X_1 \ X_2	0	1	2	3
0	X			
1				X
2			X	X
3		X	X	X

$$P(X_1=0 \text{ 且 } X_2=1)=\frac{\binom{4}{0}\binom{3}{1}\binom{2}{2}}{\binom{9}{3}}=\frac{3}{84}$$

$$P(X_1=0 \text{ 且 } X_2=2)=\frac{\binom{4}{0}\binom{3}{2}\binom{2}{1}}{\binom{9}{3}}=\frac{6}{84}$$

$$P(X_1=0 \text{ 且 } X_2=3)=\frac{\binom{4}{0}\binom{3}{3}\binom{2}{0}}{\binom{9}{3}}=\frac{1}{84}$$

$$P(X_1=1 \text{ 且 } X_2=0)=\frac{\binom{4}{1}\binom{3}{0}\binom{2}{2}}{\binom{9}{3}}=\frac{4}{84}$$

$\vdots$

所以 X_1, X_2 的聯合機率分配為

X_1 \ X_2	0	1	2	3
0	0	$\frac{3}{84}$	$\frac{6}{84}$	$\frac{1}{84}$
1	$\frac{4}{84}$	$\frac{24}{84}$	$\frac{12}{84}$	0
2	$\frac{12}{84}$	$\frac{18}{84}$	0	0
3	$\frac{4}{84}$	0	0	0

⑵同理，X_2、X_3 的聯合機率分配為

X_2 \ X_3	0	1	2
0	$\frac{4}{84}$	$\frac{12}{84}$	$\frac{4}{84}$
1	$\frac{18}{84}$	$\frac{24}{84}$	$\frac{3}{84}$
2	$\frac{12}{84}$	$\frac{6}{84}$	0
3	$\frac{1}{84}$	0	0

5.5 盒中有 3 個藍色球、2 個紅色球、3 個綠色球，隨機自盒中取出兩球，若 X 代表取出 2 球中藍球的個數，Y 表示取出 2 球中紅球的個數。

⑴求 X, Y 的聯合機率表，並請用公式表示聯合機率。

⑵求機率 $P((X, Y) \in A)$，$A = \{(x, y) \mid x + y \leq 1\}$。

⑶求 X, Y 的邊際機率表。

⑷計算條件機率 $P(X = 0 \mid Y = 1)$。

⑸在 $Y = 1$ 的前提下求 X 的條件機率分配。

解：

⑴ X, Y 之聯合機率表為

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{28}$
1	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{14}$	0
2	$\frac{3}{28}$	0	0

若以公式表示之為

$$f(x, y) = \frac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{3}{2-x-y}}{\binom{8}{2}}$$

其中$x=0$、1、2　$y=0$、1、2且$0\le x+y\le 2$

(2)$P\big((X,Y)\in A\big)=P(x+y\le 1)$

$$=f(0,0)+f(0,1)+f(1,0)$$

$$=\frac{3}{28}+\frac{3}{14}+\frac{9}{28}$$

$$=\frac{9}{14}$$

(3)$P(X=0)=g(0)=\sum_{y=0}^{2}f(0,y)$

$$=f(0,0)+f(0,1)+f(0,2)$$

$$=\frac{3}{28}+\frac{3}{14}+\frac{1}{28}$$

$$=\frac{5}{14}$$

$P(X=1)=g(1)=\sum_{y=0}^{2}f(1,y)$

$$=f(1,0)+f(1,1)+f(1,2)$$

$$=\frac{9}{28}+\frac{3}{14}+0$$

$$=\frac{15}{28}$$

$P(X=2)=g(2)=\sum_{y=0}^{2}f(2,y)$

$$=f(2,0)+f(2,1)+f(2,2)$$

$$=\frac{3}{28}+0+0$$

$$=\frac{3}{28}$$

所以，X的邊際機率分配為

X	0	1	2
$g(x)$	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

同理可得 Y 的邊際機率分配為

Y	0	1	2
$h(y)$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{28}$

(4)$P(X=0\mid Y=1)=\dfrac{P(x=0,y=1)}{P(y=1)}$

$$=\frac{\frac{3}{14}}{\frac{3}{7}}$$

$$=\frac{1}{2}$$

(5) $Y=1$ 前提下，X 的條件機率分配為 $f(x\mid Y=1)$

$$f(x\mid Y=1)=\frac{f(x,1)}{h(1)}\text{，}x=0\text{、}1\text{、}2$$

$$f(0\mid Y=1)=\frac{f(0,1)}{h(1)}=\frac{\frac{3}{14}}{\frac{3}{7}}=\frac{1}{2}$$

$$f(1\mid Y=1)=\frac{f(1,1)}{h(1)}=\frac{\frac{3}{14}}{\frac{3}{7}}=\frac{1}{2}$$

$$f(2\mid Y=1)=\frac{f(2,1)}{h(1)}=\frac{0}{\frac{3}{7}}=0$$

所以，$Y=1$ 前提下，X 之條件機率分配為

X	0	1	2
$f(x\mid Y=1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

5.6 某電腦專賣店門市部，對 100 位當日來店顧客進行問卷調查，其中有 60 位是因為看到促銷廣告而來店選購，40 位下單購買的顧客中有 30 位看到促銷廣告，請問

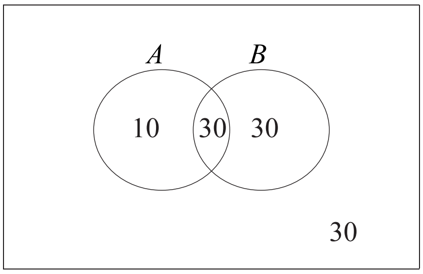
(1)在來店顧客中未看到廣告而下單購買的機率？

⑵在來店顧客中看到廣告而下單購買的機率？

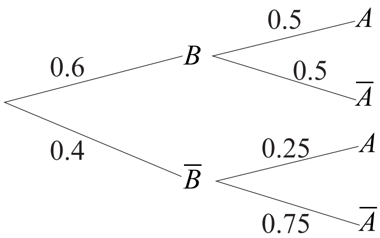
⑶由⑴、⑵結果判斷促銷廣告是否有提高購買率的效應？

解：

令A表示「下單購買」，B表示「看到促銷廣告」則本問題的文氏圖、列聯表及樹型圖分別可表示如下



購買 \ 廣告	B	$\overline{B}$	
A	30	10	40
$\overline{A}$	30	30	60
	60	40	

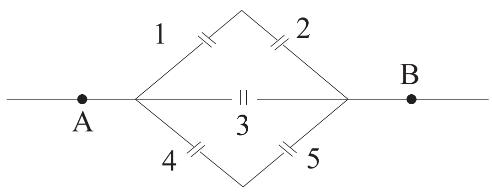


⑴$P(A|\overline{B})=0.25$

⑵$P(A|B)=0.5$

⑶$P(A|B)>P(A|\overline{B})$，所以促銷有效。

5.7 下述電路中共有 5 個繼電器，每一個繼電器關閉（表示電流通過）的機率為 p，各繼電器間關閉與否為獨立事件，則端點 A、B 間有電流相通的機率？

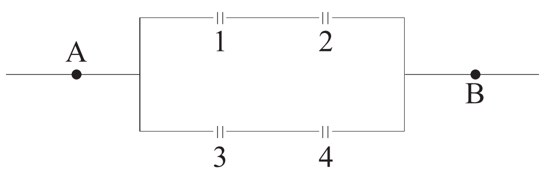


解：

令 C_i 代表「第 i 個繼電器關閉」，$i=1,2,3,4,5$，E 代表「A、B 間電流相通」，則

$$
\begin{aligned}
P(E) &= P\left\{(C_1 \cap C_2) \cup C_3 \cup (C_4 \cap C_5)\right\} \\
&= P(C_1 \cap C_2) + P(C_3) + P(C_4 \cap C_5) \\
&\quad - P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) - P(C_1 \cap C_2 \cap C_4 \cap C_5) - P(C_3 \cap C_4 \cap C_5) \\
&\quad + P(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 \cap C_5) \\
&= p^2 + p + P^2 - p^3 - p^4 - p^3 + p^5 \\
&= p + 2p^2 - 2p^3 - p^4 + p^5
\end{aligned}
$$

5.8 下述電路中共有 4 個繼電器，每一個繼電器關閉（表示電流通過）的機率為p，各繼電器間關閉與否為獨立事件，請問端點 A、B 間有電流相通的機率？



解：

令 C_i 代表「第 i 個繼電器關閉」，$i=1,2,3,4$，E 代表「A、B 間電流相通」，則

$$
\begin{aligned}
P(E) &= \{(C_1 \cap C_2) \cup (C_3 \cap C_4)\} \\
&= P\{C_1 \cap C_2\} + P\{C_3 \cap C_4\} - P\{C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4\} \\
&= P(C_1) \cdot P(C_2) + P(C_3) \cdot P(C_4) - P(C_1) \cdot P(C_2) \cdot P(C_3) \cdot P(C_4) \\
&= p^2 + p^2 - p^4
\end{aligned}
$$

（註）請特別注意本題中 $C_1 \cap C_2$ 與 $C_3 \cap C_4$ 不為互斥事件，為什麼？你想清楚了嗎？

5.9 投擲公平的骰子兩次，事件 A 表示「第一次出現偶數」，事件 B 表示「第二次出現 5 或 6」，請問 A、B 是否為獨立事件？

解：

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \\
P(B) &= \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \\
P(A \cap B) &= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$，所以，$A$、$B$ 互為獨立事件，這表示，第二次出現 5 或 6 的機率不受第一次出現偶數與否的影響。

5.10 已知有關 A、B、C 三事件的以下機率

$P(A \cup B) = 0.75$，　$P(A \cap B) = 0.50$，　$P(B \mid C) = 0.50$

$P(B \cup C) = 0.75$，　$P(A \cap C) = 0.25$，　$P(A \mid B) = 0.75$

(1)計算以下機率

(a) $P(B)$

(b) $P(A)$

(c) $P(B \mid A)$

(d) $P(C)$

(e) $P(B \cap C)$

(f) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

(g) $P(\overline{A} \mid B)$

(h) $P(\overline{B}|A)$

⑵請回答以下問題，並提出你的依據

(a) B、C 是否為互斥事件？

(b) B、C 是否為獨立事件？

解：

⑴(a) $P(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A|B)}=\dfrac{0.5}{0.75}=\dfrac{2}{3}=0.67$

(b) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$，所以

$P(A)=P(A\cup B)-P(B)+P(A\cap B)$

$=0.75-0.67+0.5=0.58$（或$\dfrac{7}{12}$）

(c) $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0.5}{0.58}=0.86$

(d) $P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)$

$0.75=0.67+P(C)-P(C)\cdot P(B|C)$

$=0.67+P(C)-0.5P(C)$

所以，$P(C)=0.17$ 或（或$\dfrac{1}{6}$）

(e) $P(B\cap C)=P(C)\cdot P(B|C)=\dfrac{1}{6}\times 0.5=\dfrac{1}{12}$（或 0.08）

(f) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})$

$=1-P(A\cap B)$

$=1-0.5=0.5$

(g) $P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)$

$=1-0.75=0.25$

(h) $P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)$

$=1-0.86=0.14$

⑵(a)B、C 不是互斥事件，因為 $P(B \cap C) = \dfrac{1}{12} \neq 0$

(b)B、C 不為獨立事件，因為 $P(B \mid C) = 0.5$，$P(B) = 0.67$

$P(B \mid C) \neq P(B)$

5.11 85 位隨機樣本中 50 位男生，35 女生，其中 33 位贊成電視節目分級制度，23 位男生不贊成，請問

⑴有多少女生贊成。

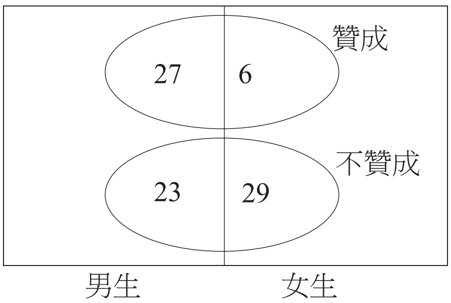
⑵將上述資料以列聯表型態呈現。

解：

⑴ 27 位男生贊成（$50 - 23 = 27$）

6 位女生贊成（$33 - 27 = 6$）

⑵先以文氏圖表示如下：



再以列聯表表示：

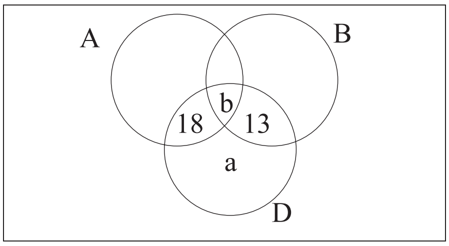
態度／性別	贊成	不贊成
男	27	23
女	6	29

5.12 學校宿舍管理委員會針對正在修訂中的宿舍安全管理辦法進行意見調查，本系 70 位同學中（37 位男生， 33 位女生），其中有 36 位不住學校宿舍，女生中有 9 位

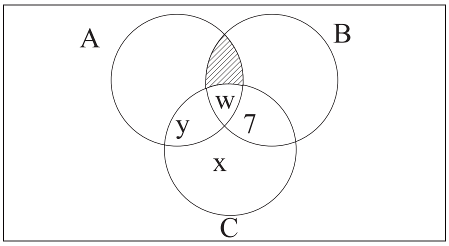
同學不贊成新辦法，18 位不住宿的男同學贊成新辦法，13 位住宿的男同學不贊成新辦法，7 位住宿的女同學不贊成新辦法。請問本系同學中有多少住宿的同學贊成新辦法？

解：

令 A 表示「贊成」，B 表示「住宿」，C 表示「女生」，D 表示「男生」，以 A、B、D 三事件畫得文氏圖如下



同理，以 A、B、C 三事件畫文氏圖為



則由已知條件「36 位不住宿」得知

$$a+x+y=18 \qquad ①$$

由男生人數共 37 人得知

$$a+b=6 \qquad ②$$

由女生人數共 33 人得知

$$w+x+y=26 \quad ③$$

由 9 位女同學不贊成新辦法得知

$$x=2 \quad ④$$

④式代入①、③得

$$a+y=16 \quad ⑤$$

$$w+y=24 \quad ⑥$$

由⑤、⑥兩式得知

$$w-a=8$$

$$a=w-8$$

代入②式，$b+w=14$

所以，本系同學中住宿且贊成新辦法有 14 人。

5.13 假設一個不公平的骰子，「點數 1」出現的機率 3 倍於其他各點數出現的機率（其他各點數出現的機率相等）

(1)點數 1 的機率？

(2)點數 2 的機率？

解：

令「點數 1」出現的機率為 x，其他點數出現的機率為 $\frac{1}{3}x$，則

$$x+5\times(\frac{1}{3}x)=1$$

所以，$x=\frac{3}{8}$

(1)P(點數 1)$=\frac{3}{8}$

(2)P(點數 2)$=\frac{1}{8}$

5.14 三個燒杯中分別為20%、40%、60%濃度的鹽水，按3：2：1的比例均勻混合，請問混合液的鹽濃度為？

解：

令S表示「鹽」，$P(S)$表示液體中鹽的濃度，C_1表示燒杯1，C_2表示燒杯2，C_3表示燒杯3。已知

$$P(S|C_1)=0.2$$
$$P(S|C_2)=0.4$$
$$P(S|C_3)=0.6$$

按3：2：1混合，所以混合液中來自各燒杯的比例為

$$P(C_1)=\frac{3}{6}$$
$$P(C_2)=\frac{2}{6}$$
$$P(C_3)=\frac{1}{6}$$

所以，混合液中的鹽濃度為

$$\begin{aligned}P(S)&=P(C_1)\cdot P(S|C_1)+P(C_2)\cdot P(S|C_2)+P(C_3)\cdot P(S|C_3)\\&=\frac{3}{6}\times 0.2+\frac{2}{6}\times 0.4+\frac{1}{6}\times 0.6\\&=\frac{2.2}{6}\\&=0.3666\end{aligned}$$

5.15 某公司有三個廠分別在台北、台中、高雄，台北廠的產量為台中廠的兩倍，台中廠的產量和高雄廠相同，台北廠和台中廠的不良率為2ppm（百萬分之一，piece per million），高雄廠的不良率為4ppm，所有產品集中後送往舊金山北美市場發貨中心。

⑴在舊金山發貨中心，隨機抽檢一件產品，它是不良品的機率？

⑵若檢驗結果為不良品，則它是由台北廠製造的機率？

解：

令 D 代表「不良品」

M_1 代表「台北廠生產產品」

M_2 代表「台中廠生產產品」

M_3 代表「高雄廠生產產品」

由於 $P(M_2)=P(M_3)$ ，$P(M_1)=2P(M_2)$ 及 $P(M_1)+P(M_2)+P(M_3)=1$

所以得到

$$P(M_1)=\frac{1}{2}$$
$$P(M_2)=\frac{1}{4}$$
$$P(M_3)=\frac{1}{4}$$

已知 $P(D|M_1)=0.000002$
$P(D|M_2)=0.000002$
$P(D|M_3)=0.000004$

(1) $$P(D)=P(M_1)\cdot P(D|M_1)+P(M_2)\cdot P(D|M_2)+P(M_3)\cdot P(D|M_3)$$
$$=\frac{1}{2}\times 0.000002+\frac{1}{4}\times 0.000002+\frac{1}{4}\times 0.000004$$
$$=0.0000025$$

(2) $$P(M_1|D)=\frac{P(M_1)\cdot P(D|M_1)}{P(D)}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\times 0.000002}{0.0000025}$$
$$=0.4$$

5.16 袋中有兩球，每一球可能是紅球也可能是白球，隨機自袋中取出一球，若在取出這一球為紅球的情況下，另一球也是紅球的機率？

解：

由於袋中兩球有三種可能(1)兩個白球(2)一紅一白(3)兩個紅球，因此，我們令

A 表示袋中為兩個白球

B 表示袋中為一紅一白

C 表示袋中為兩個紅球

由於，機會均等，所以我們假設上述三種前提發生的機率各為 $\frac{1}{3}$ ，換句話說

$$P(A)=\frac{1}{3}$$
$$P(B)=\frac{1}{3}$$
$$P(C)=\frac{1}{3}$$

令 D 表示「取出一紅球」，則

$$P(D|A)=0$$
$$P(D|B)=\frac{1}{2}$$
$$P(D|C)=1$$

所以 $$\begin{aligned} P(D)&=P(A)\cdot P(D|A)+P(B)\cdot P(D|B)+P(C)\cdot P(D|C)\\ &=\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 1\\ &=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

P（另一球為紅球|取出一紅球）

$$=P(C|D)$$
$$=\frac{P(C\cap D)}{P(D)}$$
$$=\frac{P(C)\cdot P(D|C)}{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{2}{3}$$

5.17 某大學 90 年畢業同學醫療保健資料顯示，入學之初有 60%同學已接種 B 型肝炎疫苗，其中 90%在畢業前體檢中未感染肝炎，而入學時未注射疫苗者，有 50%在畢業時成為 B 型肝炎帶原者。

(1)若從全部該年畢業同學中隨機抽取一位同學，為 B 型肝炎帶原者的機率？

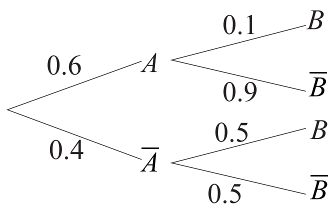
(2)若某位同學於畢業前抽檢結果 B 型肝炎帶原者的情況下，他（她）入學時已注射疫苗的機率為？

解：

令 A 表示「入學之初已接種疫苗」，B 表示「畢業時為 B 型肝炎帶原者」，則依據題意

$$P(A)=0.6$$
$$P(\overline{B}\,|\,A)=0.9$$
$$P(B\,|\,\overline{A})=0.5$$

所以，本題的樹型圖為



(1) $$P(B)=P(A)\cdot P(B\,|\,A)+P(\overline{A})\cdot P(B\,|\,\overline{A})$$
$$=0.6\times 0.1+0.4\times 0.5$$
$$=0.26$$

(2) $$P(A\,|\,B)=\frac{P(A)\cdot P(B\,|\,A)}{P(B)}$$
$$=\frac{0.6\times 0.1}{0.26}$$
$$=\frac{6}{26}$$

5.18 投擲一枚公平的銅板三次，

⑴在已知第一次出現正面的情況下，三次皆為正面的機率？

⑵在已知第二次出現正面的情況下，三次皆為正面的機率？

⑶在已知前兩次正面的情況下，三次皆為正面的機率？

⑷在已知其中有兩次正面的情況下，三次皆為正面的機率？

解：

樣本空間為

｛（正,正,正），（正,正,反），（正,反,正），（反,正,正），（正,反,反），（反,正,反）（反,反,正），（反,反,反）｝令 A 表示「三次皆正面」，B表示「第一次出現正面」，C表示「第二次出現正面」，D表示「前兩次出現正面」，E表示「其中有兩次正面」，則

$$P(A)=\frac{1}{8}$$

$$P(B)=\frac{1}{2}$$

$$P(C)=\frac{1}{2}$$

$$P(D)=\frac{1}{4}$$

$$P(E)=\frac{1}{2}$$

⑴ $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{4}$

⑵ $P(A|C)=\dfrac{P(A\cap C)}{P(C)}=\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{4}$

⑶ $P(A|D)=\dfrac{P(A\cap D)}{P(D)}=\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$

⑷ $P(A|E)=\dfrac{P(A\cap E)}{P(E)}=\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{4}$