

PART 1

# 數學教室中的數學史

## 2 溫柔數學史

數學從何而來？算術永遠都像你在學校中所學的方式運作嗎？它可能以其他方式運作嗎？是哪些人想到代數的那些法則呢，同時，基於什麼原因呢？而有關幾何的事實與證明又如何呢？

數學就像文學、物理學、藝術、經濟學或音樂，是人類不斷成長的努力成果。它擁有過去與未來，當然也擁有現在。我們今日所學習與使用的數學，在很多方面，迥異於一千年前、或五百年前，甚至於一百年前的數學。無疑地，二十一世紀的數學也將演化成為一種不同於二十世紀的東西。學習數學是什麼玩意兒，就像去瞭解另一個人。你越瞭解某人的過去，你就越能瞭解他或她的現在與未來，並且與之互動。

要想在任何層次上學好數學，你需要先理解相關問題，以便可以將解答賦予意義。而要理解一個問題，通常依賴通曉某個概念的歷史。這個概念從何而來？為何它現在或過去顯得重要？誰曾經想要這一解答以及為什麼？數學發展的每一階段，都建立在先前的成果上。每一位該發展的貢獻者，都曾經或現在是一個有著過去和某種觀點的人。針對他們的成果，他們如何反思以及為何如此思考，經常是我們理解他們的貢獻的一個關鍵性成分。

要想在任何層次上教好數學，你需要協助學生看到底蘊的問題所在，以及將細節組織在一起的思維類型。對於這樣的問題與類型之注意，可以說是學校數學—特別是那些基於 NCTM 標準所設計—最佳課程的商標。大部分學生，尤其是初年級，自然都對事物無從何而來感到好奇。由於你的協助，那種好奇可以引導他們對於他們必須知道的數學過程賦予意義。

這麼說來，在數學教室中使用數學史的好方法，究竟是什麼呢？湧上心頭的第一個答案，或許就是「說故事」—歷史軼事，或更一般地，傳記資訊。這裡，有一個典型的場景。每當引進如何將一個等差數列（arithmetic progression）求和時，教師通常告訴學生一個有關高斯的故事：

當他十歲時（有些版本說成七歲），高斯的老師給他的班級出了一道很長的題目，顯然意在求個安靜，讓自己輕鬆一下。這個題目是要求將 1 到 100 的數加起來。全班學生開始埋頭在他們各自的線條板上計算時，高斯卻只是在他的線條板上寫上 5050，並且說：「這就是答案！」驚奇萬分的老師認為高斯只是猜對了，由於他自己也不知道答案，就要求高斯保持安靜，等班上其他學生計算好了，再看看誰的答案正確。出乎意料之外，其他學生的答案也是 5050，證明了小高斯的答案果然正確。他究竟怎麼做的？

說這樣的故事的確有一些用處。畢竟，這是一個有趣的故事，其中有一位學生成了英雄人物，機智更勝於他的老師。這個故事本身將讓學生深感興趣，而且他們或許會記住。由於牢記在他們的記憶中，這個故事有如一個掛鉤，可以在上面掛一個數學概念—在本例中，這是指算術數列的求和方法。就像大部分傳記的評論一樣，這個故事也提醒學生，有真實的人物在他們所學習的數學背後，同時，某人也必須發現這一公式，並掌握這一概念。最後，特別是當故事照上述方式來說時，這個故事可以引導班級學生自己發現公式。（畢竟，如果一個十歲小孩可以做得到……）。

然而，這個例子也引發了一些問題。那個故事出現在很多不同的文獻上，而且有好幾個不同版本。所求總和經常是另一個更複雜的算術數列。至於老師的愚蠢，有時還被他對高斯的態度之過當反應所強化。這些變貌都引起了這則故事的真實性之質疑。它真的發生了嗎？我們如何得知？它有意義嗎？

在某種程度上，它是否真實之意義不大，但是，教師可能會對告知學生一個可能沒那麼真實的故事耿耿於懷。在我們的例子中，某些問題其實並不是那麼難以搞定。這個故事，是由高斯本人老年時告訴他的朋友，因此，沒有特別理由懷疑它的真實性，儘管不無可能加油添醋，就像很多老人喜歡吹噓當年勇一樣。最原始版本似乎提到一個

涉及很大數目且為非特定的算術數列，但是，整體來說，上述版本好像也沒有那麼離譜。不幸地，要確定一個軼事是否為真，並非易事。所以，當教師使用一個軼事時，最好向學生口頭上提一下說他們所聽到的故事，並不必然是嚴謹的史實。

不過，使用歷史或傳記軼事的主要限制，經常由於它們只是略微連結到數學而已。本書雖然包括一些這樣的故事，<sup>1</sup>但是，我們希望導向在課堂上使用歷史的一些其他方法，更緊密地將數學與歷史交織在一起。

其中之一，就是使用歷史以提供寬廣的俯瞰視野（**broad overview**）。對於學生而言，學校數學的經驗莫過於一些毫不相關的片段資訊之隨機組合。可是，這並不是數學被實際創造的真相。人們為了某理由做事，而且通常以一種浩大的跨世代的合作，在前人的基礎上建立結構。歷史資訊往往可以容許我們與學生分享這一個「大圖像」。同時，這種資訊也可用以說明為何某些概念被發展出來。例如，有關複數的素描 17，就說明了何以數學家會被引導去發明讓學生起初覺得奇怪的新種類之數。

大部分數學家研究種種的問題，而且，關鍵的洞識往往來自不同學科的跨界與連結。這個「大圖像」的部分，正指向下列事實：數學不同部分的諸多連結的確存在。關注歷史是察覺這些連結的一種方法，而在課堂上使用歷史，當然也可以協助學生察覺。

歷史在對於知識內容加上脈絡時，對於學習也頗有幫助。畢竟數學是文化的產物。它是在特別的時間與地點由人們所創造，因此，經常被那個脈絡所影響。有關這一方面，一旦知道得更多一點，一定可以幫助我們理解數學如何與其他人類活動調和一致。譬如說吧，在人類歷史上，數目一開始被發展而幫助政府藉以追蹤食物生產之數據，這一個想法或許無助於我們學習算術，但是，它卻將算術從一開始即嵌入一個有意義的脈絡中。這個想法也可以提醒我們思考數學在政府

---

<sup>1</sup> 有很多這一類故事的來源，可以參考本書最後〈延伸閱讀〉一節。

治理中所扮演的角色。收集統計數據，就是今天政府仍然繼續在做的事。

對於我們以及我們的學生而言，知道一個概念的歷史，可以導向更深層的理解（*deeper understanding*）。譬如說吧，考慮負數的歷史（請參考素描 5）。在有關負數的基本概念被發現之後很長一段時間，數學家一直覺得它們很難搞定。問題不在於他們無法瞭解操作這些數目的形式規則，而是他們覺得這個概念本身窒礙難行，並且也不知道如何按有意義的方式加以詮釋。理解了這件事，就有助於我們理解並且同情學生可能面對的困難。知道這些困難在歷史上如何被克服，也可以在協助學生克服這些路障的同時，為我們指出一條路來。

歷史也是學生活動（*student activities*）的一個很好的來源。它可以簡單到要學生去研究一位數學家的生平故事，也可以精緻到像一個專題，探索地引導學生重建一個導致數學突破的歷史路徑。有時，它可以激發（高年級）學生研讀原典之企圖心。經由學生的積極參與，上述所有這些方法，都可以提升他們的數學成就感（*ownership of the mathematics*）。

在本書中，我們已經試著提供所有這些使用歷史的方法之相關材料。下一個部分〈數學簡史〉則提供了數學從遠古到二十一世紀的數學史的簡明俯瞰，並且為本書提及之個別事件，建立了一個年表的、地理的架構。緊接著的二十五個素描，則為我們所涵蓋的每一個單元，打開了數學與歷史脈絡兼顧的更深一層理解。最後，〈延伸閱讀〉部分以及散佈本書各處的參考文獻備註，提議了一個更龐大的資料來源，讓你及你的學生針對任何你們感興趣的理念、人物或事件，可藉以追溯更進一步資料。

當然，歷史如何在數學教室中扮演角色，我們還可以多說一些。事實上，這是一個由國際數學教育委員會（ICMI）所贊助的研究主題。本研究主題之成果已經出版（參考 [55]）。它不易閱讀，但卻包括了很多有趣的理念與資料。同樣有用的資料，也可參考 [134]、[24] 和 [81]，都是由 MAA 所出版。這些資料都混合了數學史論文，以及

歷史在 K-12 乃至學院的數學教學之使用的相關論文。

在美國數學教師協會（NCTM）所出版的期刊《數學教師》（*Mathematics Teacher*）中，經常出現一些歷史論文，其中包括了歷史如何可以使用在教室中的一些理念。在這些路數上，還有其他很多計畫，其中一個努力的成果，是由卡茲（Victor Katz）和米開羅薇姿（Karen Dee Michalowicz）所領軍的團隊，他們已經生產一系列基於歷史主題的教室模組（historical module），即將由 MAA 出版，可能以 CD-ROM 形式問世。<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup> 譯按：本 CD-ROM 已經出版，名稱為 Historical Modules for the Teaching and Learning of Mathematics.

PART 2

**數學簡史**

數學的故事延伸了好幾千年。它歷久而彌新，最早可以追溯到字母發明時期，而在今天，新的篇章還不斷加入。因此，本篇俯瞰充其量不過是那個廣大疆域的一個簡短考察而已。至於它的目的，則在於提供讀者有關這個疆域的地勢之一般印象，同時，或許這也可以協助你更加熟悉一些更重要的地標。

我們現在在學校所學數學的很大部分（並非全部），其實都相當古老。它屬於一個始於古代近東，<sup>1</sup>接著在古希臘，然後是中世紀伊斯蘭帝國等地發展與成長的傳統。後來，這個傳統紮根於中世紀後期與文藝復興時期的歐洲，而最終變成為今日舉世理解的風貌。雖然我們並未完全忽視其他傳統（譬如中國數學），不過，由於它們甚少影響我們今日所教數學，所以，極少成為眾所矚目的焦點。

我們的考察花在古代數學的時間，遠遠多於我們對最近研究成果的付出。的確，這個失衡是真實的。最後這幾個世紀是數學大幅度進步的時代。然而，這些較新的成果所處理的單元，卻遠遠超出學校數學課程的範圍。我們寧可專注於我們在學校內教與學的數學相關故事。因此，這部分考察越到現在顯得越薄。另一方面，有關近、現代數學我們可能提及的許多單元，則出現在本書的素描之中。

數學史的研究，就像其他的歷史研究一樣，完全依賴史料。這些大部分是書寫的文件，不過，工藝製品有時也十分重要。當這些史料豐富時，我們對於所研究時代的圖像之把握，會比較理所當然。可是，當它們相當稀少時，我們就變得很難以確定了。此外，數學家書寫他們的學科之故事，也有好幾個世紀了。這通常會對某些事件引出「標準故事（版本）」來。這些故事通常大部分為真，但是，有時候歷史研究也會改變我們對於曾經發生的事件之觀點。同時，史學家也一直在爭論所謂正確的故事。為了保持本書篇幅的簡短，這篇考察將忽略很多這類微妙的事物。為了做一點彌補，我們會提供參考資料

---

<sup>1</sup> 譯按：目前近東（Near East）一詞目前較少使用，有些學者寧願使用西亞一詞。



以便你可以找到更多資訊。為了幫助你上路，我們也提供了一張有註解的書單，可能這就是進一步研究的良好切入點（參考頁 227 開始的〈延伸閱讀〉）。

當你讀完這一篇考察，可能訝異何以很少女性被提及。在二十世紀以前，西方文明的大部分文化排斥女人進入有意義的形式教育系統，尤其與科學有關者。而且，即使一個女人學習足夠多的數學以致於有實質貢獻時，也經常在爭取認可時備受煎熬。她的作品經常以匿名方式發表收場，或者由一位有地位取得出版的標準管道之（男性）數學家來提及或推薦。有時候，它甚至完全未出版。直到最近幾年來，史家才開始揭開這些女人的極其隱晦數學成就的全貌。<sup>2</sup>

在我們這個時代，對於科學上女性的大部分障礙已經消除了。不幸地，有些古老的「不公平遊戲場域」之效應仍然存在。譬如說吧，有關數學是一種男性領域之觀點，就一直是很有回春活力、自我滿足的一種預言。不過，很多事情都在變化之中。細心的歷史研究結果以及很多的二十世紀女性數學家，都證明了女人可以成為具有創造力的數學家，<sup>3</sup>她們曾經在過去有過實質貢獻，在未來也勢必可以如此延續才是。

## 開端

沒有人完全知道數學何時以及如何開始。我們的確知道在每一個曾經發展書寫的文明中，也可以找到數學知識的某一層次之證據。數目與形狀之命名，以及有關計數和算術運算的基本概念，似乎是所有人類共同遺產的一部分。人類學家已經發現獲取可以詮釋為數學的很多史前工藝製品。最早這樣的工藝製品在非洲出現，並且時間可以追溯到很久遠的 37000 年前。它們顯示男人與女人已從事數學活動有很長一段時間了。現代的人類學家與民族數學（ethnomathematics）

---

<sup>2</sup> 優良參考文獻如 [105]、[69]、[100]、[73]、[107]、[108] 和 [118]。

<sup>3</sup> 想要閱讀一位二十世紀特定的女數學家，請參看 [113]。

的研究者也觀察到全世界有很多文化，證明他們對於形式與數量都有很深刻的察覺，<sup>4</sup>同時，也經常處理需要數學理解的一些相當老練與複雜的事。其中包括，從畫出一個長方形的地基，到為紡織、編籃以及其他手工藝品設計繁複的類型。屬於當時前識字（pre-literate）社會的這些數學的（或前數學的 pre-mathematical）的元素，可能是我們有關最早人類數學活動真相的最好提示。

到了公元前 5000 年（5000 B.C.）時，當書寫系統首度在古代近東發展時，數學也開始崛起成為一個特定的活動。<sup>5</sup>當很多社會採用中央集權政府的各種組織形式時，它們需要有追蹤物產、還有多少欠稅等方法。因此，瞭解田地大小、籃子（容器）的體積，以及為了某一特別任務所需勞工數目，當然都十分重要。至於度量單位，常常隨興之所至而出現，也製造了很多涉及相當難度的算術之單位轉換問題。<sup>6</sup>遺產法律也引出有趣的數學問題。<sup>7</sup>處理這些議題，都是「書記」的專業。他們通常是專業的官僚，能夠書寫和解決簡單數學問題。數學成為一門學科，誕生於書記傳統與培養書記的學校。<sup>8</sup>

我們在這一時期所擁有的數學發展，大都來自美索布達米亞，在今天伊拉克境內，底格里斯河與幼發拉比河之間的區域，還有來自埃及，北非尼羅河流域的河谷。看起來，類似的發展在同一時期也出現在印度與中國，儘管我們有關的特定資訊相當有限。

<sup>4</sup> 參考 [7] 與 [60]。後者包括了如何在課堂上使用這些材料的許多想法。

<sup>5</sup> 想知道這件事如何發生所提出的一個理論，請參考 [121]。

<sup>6</sup> 譯按：如將歷史場景轉到中國秦漢時期，那麼，在一斤十六兩的情況下，斤兩如何互換，以及公斤與所謂的臺斤如何互換的問題。在此，我們特別提醒讀者所謂的臺斤其實在中國漢代即已出現，可參考洪萬生〈半斤八兩談公制：兼談臺斤與日斤〉，收入洪萬生《孔子與數學》（臺北：明文書局，1999），頁 75-82。

<sup>7</sup> 譯按：如將時間往後挪，歷史場景搬到穆斯林世界，則遺產問題是阿拉伯數學的特有篇章，請參考蘇意雯，〈可蘭經裡的遺產一代數學〉，《科學月刊》37(9) (2006): 700-704。

<sup>8</sup> 譯按：有關這一點，中國秦漢時代的「以吏為師」傳統，就是最好的證據之一。請參看洪萬生、林倉億、蘇惠玉和蘇俊鴻合撰的《數之起源：中國數學史開章《筭數書》》，臺北：明文書局，2006。又，《筭數書》乃是一部漢簡數學書，於西漢呂后二年（公元前 186 年）埋葬，墓主為降漢之秦吏。