

第一 部分

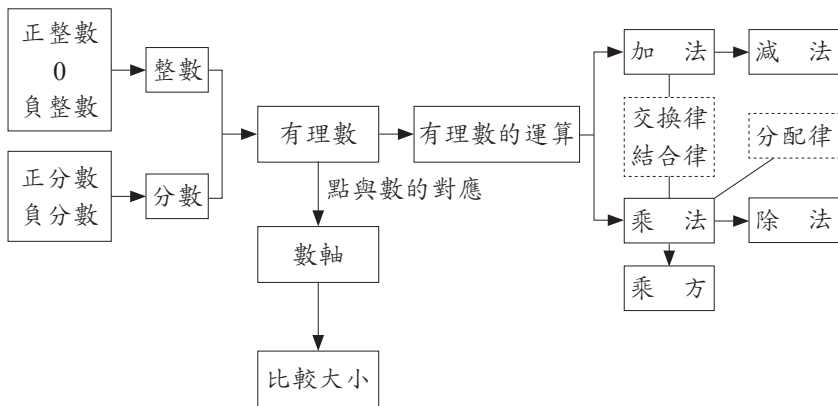
數 與 代 數

- 第 1 章 數與式
- 第 2 章 方程式與不等式
- 第 3 章 函 數

第 1 章 數與式

§ 1 有理數

知識縱橫



概念定義

● 正數與負數

像 $+2$, $+3$, $+0.5$, $\cdots$ 這樣的數叫做正數。

像 -2 , -3 , -0.5 , $\cdots$ 這樣的數叫做負數。

說明 (1) 正數與負數表示兩種具有相反意義的量，如攝氏零上3度記為 $+3^{\circ}\text{C}$ ，攝氏零下3度記為 -3°C 。

(2) 正數前面的「 $+$ 」號可以省略。

(3) 0 既不是正數，也不是負數。

● 有理數

整數和分數統稱為有理數。其中整數包括正整數、0、負整數；分數包括正分數、負分數。

● 數軸

規定了原點、正方向和單位長度的直線叫做數軸。

說明 一般而言，設 a 是一個正數，則數軸上表示數 a 的點，在原點的右邊，與原點的距離是 a 個單位長度；表示數 $-a$ 的點，在原點的左邊，與原點的距離是 a 個單位長度。

例1 在數軸上，與表示 $+1$ 的點距離是三個單位長度的點有幾個？它們分別表示什麼數？

答案 有二個。它們分別表示 -2 和 $+4$ 。

點評 在數軸上，與一個已知點距離相等的點有兩個，它們分別位於已知點的左、右兩側。本題可畫出數軸（圖形），根據已知數找出相應點加以解決，這是數學上一種十分重要的方法，即數形結合法。

● 相反數

只有符號不同的兩個數，叫做互為相反數。

說明 (1) 數 a 的相反數是 $-a$ 。正數的相反數是負數，負數的相反數是正數， 0 的相反數是 0 。

(2) 數軸上表示相反數的兩個點分別在原點的左、右兩邊，且到原點的距離相等。

例2 化簡下列各數：

$$(1) -[-(-a)] \qquad (2) -\{+[-(+m)]\}$$

$$(3) -[-(x-y)] \qquad (4) +[-(a+b)]$$

解析

$$\begin{aligned} (1) & -[-(-a)] = -(+a) = -a \\ (2) & -\{+[-(+m)]\} = -[+(-m)] = -(-m) = m \\ (3) & -[-(x-y)] = +(x-y) = x-y \\ (4) & +[-(a+b)] = -(a+b) = -a-b \end{aligned}$$

點評 解此類問題有兩種方法，一是由裡向外去括號，二是由外向裡去括號。若有奇數個負號，其結果為「負」；若有偶數個負號，其結果為「正」。

● 絕對值

數軸上表示數 a 的點與原點的距離叫做數 a 的絕對值，記作 $|a|$ 。

一個正數的絕對值是它本身；一個負數的絕對值是它的相反數；零的絕對值是零。即：

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{當 } a \text{ 是正數時,} \\ -a, & \text{當 } a \text{ 是負數時,} \\ 0, & \text{當 } a = 0 \text{ 時.} \end{cases}$$

例3 若 $|a-1|=3$ ，則 $a=$ _____。

解析

方法1：因為 $|a-1|=3$ ，所以 $a-1=3$ 或 -3 ，所以 $a=4$ 或 -2

方法2：當 $a \geq 1$ 時， $|a-1|=a-1=3$ ，所以 $a=4$

當 $a < 1$ 時， $|a-1|=1-a=3$ ，所以 $a=-2$

所以 $a=4$ 或 -2

點評

本題主要考查絕對值的意義，方法1把 $a-1$ 看成一個整體，根據絕對值等於3的數為 ± 3 求解；方法2根據使 $a-1$ 為不同符號的數的 a 值進行分類討論。

例4 求絕對值小於3的所有整數。

解析

方法1：要求的數的絕對值是整數，且小於3，絕對值只可能是0, 1, 2。而絕對值是0, 1, 2的數分別是0, ± 1 , ± 2 ，所以絕對值小於3的所有整數為0, -1 , $+1$, -2 , $+2$

方法2：要求的整數在數軸上離原點的距離小於3，這樣的整數點只有五個，即0, -1 , $+1$, -2 , $+2$

點評

本題方法1利用了一種十分重要的數學思想方法——「轉化」，進行求解。即是將較複雜的問題「絕對值小於3的所有整數」轉化為較簡單的問題「絕對值為0, 1, 2的整數」。

● 有理數的大小比較

在數軸上表示有理數，它們從左到右的順序，就是從小到大的順序，即左邊的數小於右邊的數。

說明

(1) 正數大於零，負數小於零，正數大於負數。

(2)兩個負數，絕對值大的反而小。

例5 比較 $-\frac{2}{3}$ 與 $-\frac{3}{5}$ 的大小。

解析 因為 $\left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ ， $\left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5} = \frac{9}{15}$ ， $\frac{10}{15} > \frac{9}{15}$
所以 $-\frac{10}{15} < -\frac{9}{15}$ ，即 $-\frac{2}{3} < -\frac{3}{5}$

例6 指出下列各式中的 a 各是什麼數：

$$(1)|a|=3 \quad (2)\frac{a}{|a|}=1 \quad (3)-|-a|=-a$$

解析 (1) $a = \pm 3$
(2)由 $\frac{a}{|a|} = 1$ ，得 $|a| = a$ ，且 $a \neq 0$ ，所以 a 是任意正數
(3)由 $-|-a| = -a$ ，得 $|-a| = a$ ，所以 a 是任意正數或 0

●有理數的加法法則

- (1)同號兩數相加，取相同的符號，並把絕對值相加。
- (2)絕對值不相等的異號兩數相加，取絕對值較大的加數的符號，並用較大的絕對值減去較小的絕對值；互為相反數的兩個數相加得 0。
- (3)一個數與零相加，仍得這個數。

●有理數的加法運算律

- (1)加法交換律：兩個數相加，交換加數的位置，和不變。即 $a+b=b+a$ 。
- (2)加法結合律：三個數相加，先把前兩個數相加，或者先把後兩個數相加，和不變。即 $(a+b)+c=a+(b+c)$ 。

例7 計算：

$$(1)16+(-20)+(-5)$$

$$(2)(-4)+2\frac{2}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-2\frac{2}{3}\right)$$

$$(3)\frac{3}{8}+\left(-4\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{5}{8}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(+2\frac{3}{4}\right)$$

$$(4) 3\frac{1}{4} + \left(-1\frac{1}{12}\right)$$

解析

$$\begin{aligned} (1) & 16 + (-20) + (-5) \\ &= 16 + [(-20) + (-5)] \\ &= 16 + (-25) = -9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & (-4) + 2\frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-2\frac{2}{3}\right) \\ &= \left[(-4) + \left(-\frac{1}{2}\right)\right] + \left[2\frac{2}{3} + \left(-2\frac{2}{3}\right)\right] \\ &= -4\frac{1}{2} + 0 = -4\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) & \frac{3}{8} + \left(-4\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{5}{8}\right) + \left(-\frac{5}{6}\right) + \left(+2\frac{3}{4}\right) \\ &= \left[\frac{3}{8} + \left(-\frac{5}{8}\right) + \left(+2\frac{6}{8}\right)\right] + \left[\left(-4\frac{4}{6}\right) + \left(-\frac{5}{6}\right)\right] \\ &= \frac{3-5+22}{8} + \frac{(-28)+(-5)}{6} \\ &= \frac{5}{2} + \left(-\frac{11}{2}\right) = -\frac{6}{2} = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) & 3\frac{1}{4} + \left(-1\frac{1}{12}\right) \\ &= 3 + \frac{1}{4} + (-1) + \left(-\frac{1}{12}\right) \\ &= [3 + (-1)] + \left[\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{12}\right)\right] \\ &= 2 + \frac{1}{6} = 2\frac{1}{6} \end{aligned}$$

點評

利用運算律進行加法運算，是簡捷求解的典型方法。常用技巧有：①先把正數結合在一起相加，負數結合在一起相加，將多個數相加轉化為兩個數相加。②先把互為相反數的兩個數結合在一起相加，利用互為相反數的兩數之和為零的性質使運算簡便。③對於分數相加，應從分母出發考慮分組，即將分母易化為相同的數分成一組，以便於計算。④對於帶分數，可拆成整數與真分數之和，但應注意符號。如 $-1\frac{1}{12} = -1 + \left(-\frac{1}{12}\right)$ 。

●有理數的減法法則

減去一個數，等於加上這個數的相反數。即 $a-b=a+(-b)$ 。

例8 計算：

$$(-5.5)-(-3.2)-(-2.5)-(-4.8)。$$

解析

可仿照加法運算，進行分組計算。

$$\begin{aligned} & (-5.5)-(-3.2)-(-2.5)-(-4.8) \\ & = -5.5+3.2+2.5+4.8 \\ & = (-5.5+2.5)+(3.2+4.8) \\ & = -3+8=5 \end{aligned}$$

點評

①在使用減法法則進行減法運算時，要同時改變兩個符號，即將運算符號「 $-$ 」改為「 $+$ 」，同時，把減數改為它的相反數，即改變其性質符號。②分組時要本著化「零」為「整」、便於計算的原則。

●有理數的乘法法則

兩數相乘，同號得正，異號得負，並把絕對值相乘；任何數與0相乘，都得0。

說明

- (1)幾個不是0的數相乘，負乘數的個數是偶數時，積是正數；負乘數的個數是奇數時，積是負數，即積的符號決定於負乘數的個數。如 $(-1)^{2006}=1$ ， $(-1)^{2007}=-1$ 。
- (2)幾個數相乘，如果其中有乘數為0，則積等於0。

●有理數的乘法運算律

- (1)乘法交換律：兩個數相乘，交換乘數的位置，積不變。
即 $ab=ba$ 。
- (2)乘法結合律：三個數相乘，先把前兩個數相乘，或者先把後兩個數相乘，積不變。即 $(ab)c=a(bc)$ 。
- (3)乘法分配律：一個數與兩個數的和相乘，等於把這個數分別與這兩個數相乘，再把積相加。即 $a(b+c)=ab+ac$ 。

例9 計算：

$$(1)(-5) \times \left(-\frac{7}{9}\right) \times 0.8 \times \left(-2\frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{7}$$

$$(2) \left[\left(-\frac{7}{12}\right) + \frac{3}{4} - \frac{5}{6} - \left(-\frac{5}{18}\right) \right] \times (-36)$$

$$(3)(-56) \times (-3.54) + (-56) \times 4.54$$

解析

$$(1)(-5) \times \left(-\frac{7}{9}\right) \times 0.8 \times \left(-2\frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{7}$$

$$= -\left(5 \times \frac{7}{9} \times \frac{4}{5} \times \frac{9}{4} \times \frac{1}{7}\right) = -1$$

$$(2) \left[\left(-\frac{7}{12}\right) + \frac{3}{4} - \frac{5}{6} - \left(-\frac{5}{18}\right) \right] \times (-36)$$

$$= \frac{7}{12} \times 36 - \frac{3}{4} \times 36 + \frac{5}{6} \times 36 - \frac{5}{18} \times 36$$

$$= 21 - 27 + 30 - 10 = 51 - 37 = 14$$

$$(3)(-56) \times (-3.54) + (-56) \times 4.54$$

$$= (-56) \times [(-3.54) + 4.54]$$

$$= (-56) \times 1 = -56$$

點評

①有理數的乘法應按乘法法則先確定積的符號，再把絕對值相乘。計算時，一般將小數化為分數，帶分數化為假分數。

②解題時，要善於捕捉使運算簡化的條件和方法，如第(2)小題中的分配律。③對乘法運算律的應用要靈活，正用、逆用都要熟練。

●有理數的除法法則

除以一箇不等於0的數，等於乘上這個數的倒數。即
 $a \div b = a \cdot \frac{1}{b} \quad (b \neq 0)$ 。

說明

(1)乘積為1的兩個數互為倒數， a 的倒數是 $\frac{1}{a}$ ($a \neq 0$)，0沒有倒數。

(2)兩數相除，同號得正，異號得負，並把絕對值相除。

(3)0除以任何一個不等於0的數，都得0。

例10 計算：

$$-2.5 \div \frac{5}{8} \times \left(-\frac{1}{4}\right)$$

【解析】

$$-2.5 \div \frac{5}{8} \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{2} \times \frac{8}{5} \times \frac{1}{4} = 1$$

【點評】

因為有理數的除法可以化為乘法，所以可以利用乘法的運算性質簡化運算，乘、除混合運算往往先將除法化為乘法，然後確定積的符號，最後求出結果。

● 有理數的乘方

求 n 個相同數的積的運算叫做乘方，乘方的結果叫做幂。在 a^n 中， a 叫做底數， n 叫做指數。

【說明】

- (1) 一個數可以看做是這個數本身的一次方，即 $a = a^1$ 。指數 1 通常不寫。
- (2) 習慣上把 a^2 (a 的二次方) 叫做 a 的平方， a^3 (a 的三次方) 叫做 a 的立方。
- (3) 正數的任何次幂都是正數；負數的奇次幂是負數，偶次幂是正數。
- (4) 表示分數和負數的乘方時，底數要加括號，以避免誤解。

【例 11】 計算：

$$(1) (-2)^5 - (-2) \times 5 \qquad (2) \left(-1\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{5^3}{3}$$

$$(3) (-4 \times 5^2) - (-4 \times 5)^2 \qquad (4) (-8 \div 2^3) - (-8 \div 2)^3$$

【解析】

$$(1) (-2)^5 - (-2) \times 5 = -32 - (-10) = -32 + 10 = -22$$

$$(2) \left(-1\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{5^3}{3} = \left(-\frac{5}{3}\right)^3 - \frac{5^3}{3} = -\frac{125}{27} - \frac{1125}{27} = -\frac{1250}{27}$$

$$(3) (-4 \times 5^2) - (-4 \times 5)^2 = (-4 \times 25) - (-20)^2 \\ = (-100) - (+400) = -500$$

$$(4) (-8 \div 2^3) - (-8 \div 2)^3 = (-8 \div 8) - (-4)^3 \\ = (-1) - (-64) = -1 + 64 = 63$$

【點評】

在乘方運算中要注意：①不要把乘方與乘法混淆，如 $5^2 = 5 \times 5 = 25$ ，要避免出現 $5^2 = 5 \times 2 = 10$ 的錯誤。②應嚴格遵守運算順序。如 $(-4 \times 5)^2$ ，應先計算括號內的乘法，然後再乘方； (-4×5^2) ，應先計算 5 的平方，再做乘法。③一個分數的乘方必須把整個分數加括號。

●有理數的混合運算

- (1)先乘方，再乘除，最後加減。
- (2)同級運算，從左到右進行。
- (3)如有括號，先做括號內的運算，按小括號、中括號、大括號依次進行。

例12 計算：

$$(1) \left[1\frac{1}{24} - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{6} - \frac{3}{4} \right) \times 24 \right] \div 5$$

$$(2) \left[\left(-\frac{2}{3} \right)^2 - \left(-1\frac{2}{3} \right) \div \left(-1\frac{1}{8} \right) \right] \times \left(-1\frac{1}{2} \right)^3$$

解析

$$(1) \left[1\frac{1}{24} - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{6} - \frac{3}{4} \right) \times 24 \right] \div 5$$

$$= \left[1\frac{1}{24} - (9 + 4 - 18) \right] \div 5 = \left(\frac{25}{24} + 5 \right) \times \frac{1}{5} = 1\frac{5}{24}$$

$$(2) \left[\left(-\frac{2}{3} \right)^2 - \left(-1\frac{2}{3} \right) \div \left(-1\frac{1}{8} \right) \right] \times \left(-1\frac{1}{2} \right)^3$$

$$= \left(\frac{4}{9} - \frac{5}{3} \times \frac{8}{9} \right) \times \left(-\frac{27}{8} \right) = \frac{4}{9} \times \left(-\frac{27}{8} \right) - \frac{5}{3} \times \frac{8}{9} \times \left(-\frac{27}{8} \right)$$

$$= -\frac{3}{2} + 5 = 3\frac{1}{2}$$

點評

在有理數運算中，加、減稱為一級運算，乘、除稱為二級運算，乘方及開方（以後學到）稱為三級運算。在沒有括號表明運算順序時，同級運算由左到右依次進行。混合運算先算三級，再算二級，最後算一級，有括號的要先算括號裡的。

知識紅燈

1. 對有理數進行分類時，錯把有理數分為整數和小數兩類：實際上有理數本身就是小數，不僅如此，在後面的學習中，我們知道實數等同於小數，所以說小數包括整數。
2. 對用字母表示數不理解或者誤解：如認為 $-a$ 就一定是負數。
3. 利用數軸上的點表示有理數時，常常出現下列錯誤：①刻度不均勻；②負數的排列錯誤，如把表示 -2 的點畫在表示 -3 的點的左邊。
4. 有理數運算時，容易發生的錯誤：①運算符號出現差錯；②運算順序不正確；③濫用運算律。