第一章　極限與連續

1-1　直觀極限

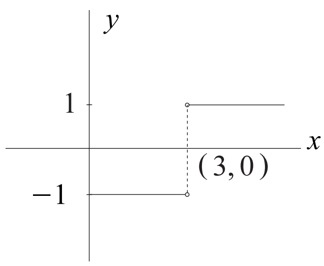
1. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L_1$，$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L_2$之定義：考慮實軸上之二個點$x$與$a$，設$a$為固定，而$x$為動點，則$x$能從$a$之右邊或左邊來接近$a$，若$x$由右邊接近$a$則寫成$x\to a^+$，反之，若$x$由左邊接近$a$則寫成$x\to a^-$，$x\to a^+$稱右極限，$x\to a^-$稱左極限。當左右極限存在且相等時，稱$f(x)$在$x=a$處之極限值存在，例如：最大整數函數$f(x)=[x]$，若$n+1>x\geq n$，則我們定義$[x]=n$，$n$為整數。$\lim\limits_{x\to 0^+}[x]=0$，而$\lim\limits_{x\to 0^-}[x]=-1$。

在求帶有 Gauss 符號或絕對值之極限問題時，我們常須考慮彼等之左右極限是否相等。

例 1　若$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-3|}{x-3} & x\neq 3\\ 0 & x=3\end{cases}$，求$\lim\limits_{x\to 3} f(x)$。

解　$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-3|}{x-3} & x\neq 3\\ 0 & x=3\end{cases}$

相當於$f(x)=\begin{cases}1 & x>3\\ 0 & x=3\\ -1 & x<3\end{cases}$

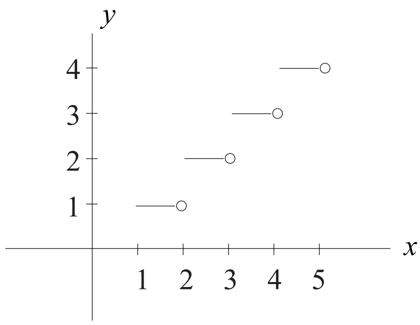


故 $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-1$

$\because$ $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$，從而$\lim\limits_{x\to 3} f(x)$不存在

例2 求 $\lim\limits_{x\to 5^-}[x]-x$。



解 $\lim\limits_{x\to 5^-}[x]-x$

$=4-5=-1$

例3 求$\lim\limits_{x\to n}[x]$, n 為整數。

解 $\lim\limits_{x\to n^+}[x]=n$

$\lim\limits_{x\to n^-}[x]=n-1$

$n\in N$

即 $\lim\limits_{x\to n}[x]$不存在， n 為整數。

初學者在求最大整數函數之極限時，常會感到頭痛，在此時不妨考慮一個實際近似值而得到解題之頭緒。例如求 $\lim\limits_{x\to 1}[x^2]$ 需考慮 $\lim\limits_{x\to 1^+}[x^2]$ 及 $\lim\limits_{x\to 1^-}[x^2]$，求 $\lim\limits_{x\to 1^-}[x^2]$時，取$x=0.9$ ，則$[x^2]=0$ ，所以可想到 $\lim\limits_{x\to 1^-}[x^2]=0$，求 $\lim\limits_{x\to 1^+}[x^2]$時，取 $x=1.1$ ，代入$[x^2]=[1.21]$

$=1$，$\therefore \lim_{x\to 1^+}[x^2]=1$，從而 $\lim_{x\to 1}[x^2]$ 不存在。在例 2 中，求 $\lim_{x\to 5^-}[x]$ 時取 $x=4.9$，得 $[x]=[4.9]=4$。在下面練習之題 1 中，在 $\lim_{x\to 1^-}(1-x+[x]-[1-x])$ 中不妨取 $x=0.9$ 代入。又如 $\lim_{x\to \frac{1}{2}^-}$ 時，取 $x=0.49\cdots$，以此類推，此種推理雖不嚴謹，卻可供解題時之參考。

類似問題

1. 求 $\lim_{x\to 1^-} 1-x+[x]-[1-x]$。

2. 求 $\lim_{x\to 1}[x]+[2-x]-1$。

3. 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，求 $\lim_{x\to 0} f(x)$。

4. 若 $f(x)=\left(\left[\dfrac{3}{2}+x\right]-\left[\dfrac{3}{2}\right]\right)\Big/x$，求 $\lim_{x\to 0} f(x)$。

5. 求 $\lim_{x\to 1}\dfrac{[(x-1)^2]}{x^2-1}$。

6. 若 $f(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$，求 $\lim_{x\to 0} f(x)$。

7.求$\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x-1}$。

8.求$\lim\limits_{x\to 10^-}[x]+\sqrt{10-[x]}$。

9.若$f(x)=[\sin x]$，求(a) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$；(b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}f(x)$。

◎10.求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+3}{2^{\frac{1}{x}}+1}$。

※11.若$f(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ -1, & x\in Q'\end{cases}$，求$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^2$，$a\in R$。

（※在本書中以Q代表有理數集合，Q'表無理數集合）

12.求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[x]}{x}$。

13.求$\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{1}{x}]$。

14.試述極限之定義。

15.試求$\lim\limits_{x\to 2^+}(\dfrac{x-2}{|x-2|}+|x+2|)-\lim\limits_{x\to 2^-}(\dfrac{x-2}{|x-2|}+|x+2|)$。

16.試求$\lim\limits_{x\to 0^+}(\dfrac{x}{|x|}+|x|)-\lim\limits_{x\to 0^-}(\dfrac{x}{|x|}+|x|)$。

17.試求$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{[x^2]-[x]^2}{x^2-1}$。

解

1. $\lim\limits_{x\to 1^-} 1-x+[x]-[1-x]$

$=1-1+0-0$

$=0$

2. $\lim\limits_{x\to 1^+}[x]+[2-x]-1=1-0-1=0$

$\lim\limits_{x\to 1^-}[x]+[2-x]-1=0+1-1=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}[x]+[2-x]-1=0$

3. $f(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$

$\because \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

從而 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在

4. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\left[\frac{3}{2}+x\right]-\left[\frac{3}{2}\right]}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-1}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\left[\frac{3}{2}+x\right]-\left[\frac{3}{2}\right]}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-1}{x}=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[\frac{3}{2}+x\right]-\left[\frac{3}{2}\right]}{x}=0$

5. 0

6.與第 3.題等值（equivalent），故極限值亦不存在

7. $\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x-1}=0$，$\lim_{x\to 1^-}\sqrt{x-1}$ 不存在

$\therefore \lim_{x\to 1}\sqrt{x-1}$ 不存在

8. $\lim_{x\to 10^-}[x]+\sqrt{10-[x]}=9+\sqrt{10-9}=10$

9.(a) $\lim_{x\to 0^+}[\sin x]=0$，$\lim_{x\to 0^-}[\sin x]=-1$，

$\therefore \lim_{x\to 0}[\sin x]$ 不存在

(b) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}[\sin x]=+1$

10. $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+3}{2^{\frac{1}{x}}+1}=1$，$\lim_{x\to 0^-}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+3}{2^{\frac{1}{x}}+1}=3$

$\therefore \lim_{x\to 0}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+3}{2^{\frac{1}{x}}+1}$ 不存在

11.因 $[f(x)]^2\equiv 1$ $\therefore \lim_{x\to a}[f(x)]^2=1$

12. $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{[x]}{x}=0$，$\lim_{x\to 0^-}\dfrac{[x]}{x}=+\infty$ $\therefore \lim_{x\to 0}\dfrac{[x]}{x}$ 不存在

13. $\lim_{x\to 0^+}[\dfrac{1}{x}]=\infty$，$\lim_{x\to 0^-}[\dfrac{1}{x}]=-\infty$ $\therefore \lim_{x\to 0}[\dfrac{1}{x}]$ 不存在

14.參見 1-1-I-1 課文說明。

15. $\lim_{x\to 2^+}(\dfrac{x-2}{|x-2|}+|x+2|)-\lim_{x\to 2^-}(\dfrac{x-2}{|x-2|}+|x+2|)$

$=\lim_{x\to 2^+}(1+x+2)-\lim_{x\to 2^-}(-1+x+2)=5-3=2$

16. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{x}{|x|}+|x|\right)-\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{x}{|x|}+|x|\right)$

$=\lim\limits_{x\to0^+}(x+1)-\lim\limits_{x\to0^-}(-1-x)=2$

17. 原式$=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{0}{x^2-1}=0$

1-2　各種極限問題之解法

☑定理：極限定理

1. 若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$，則

(1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)=A\pm B$

(2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)=A\cdot B$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{A}{B}$，但 $B\neq0$

(4) 若$\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在，則其必為惟一。

2. 若$f_1(x)\leq f(x)\leq f_2(x)$且$\lim\limits_{x\to a}f_1(x)=\lim\limits_{x\to a}f_2(x)=L$，則$\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$（此又稱擠壓定理）。

3. 若$f(x)\leq g(x)$，則$\lim\limits_{x\to a}f(x)\leq\lim\limits_{x\to a}g(x)$

☑觀念：

我們可應用上述定理計算$x\to\infty$，或單邊極限。

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$表示$x$不斷地接近$a$，但$x\neq a$。

如$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$，$f(2)$不存在，但

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}}=4$$

■因式分解法

◎例 *1* 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$。

解 原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1}+\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}+\cdots+\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}1+\lim_{x\to 1}(x+1)+\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)+\cdots\cdots$$

$$+\lim_{x\to 1}(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$$

$$=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

■有理化法

※例 *1*　利用 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{\cos x}}$。

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{\cos x}}\cdot\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\dfrac{1-\cos x}{x^2}+\dfrac{\sin x}{x}}=\frac{4}{3}$$

※例 *2*　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{(1+a_1x)(1+a_2x)\cdots(1+a_nx)}-1}{x}$。

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+a_1x)(1+a_2x)\cdots(1+a_nx)-1}{x[\sqrt{(1+a_1x)(1+a_2x)\cdots(1+a_nx)}+1]}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{〔1+a_1+a_2+\cdots+a_n)x+(a_1a_2+a_1a_2+a_1a_2+\cdots)x^2+\cdots〕-1}{x〔\sqrt{(1+a_1x)(1+a_2x)\cdots(1+a_nx)}+1〕}$$

$$=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{2}$$

■變數變換法

例 *1*　求 $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}-2}$。

解　原式 $=\lim\limits_{y\to 2}\dfrac{y^2-4}{y^2-y-2}$　　取 $y=\sqrt[4]{x}$

$$=\lim_{y\to 2}\frac{(y-2)(y+2)}{(y-2)(y+1)}=\frac{4}{3}$$

$$\therefore \lim_{x\to 16} f(x)=\lim_{y\to \sqrt[4]{16}} f(y)$$
$$=\lim_{y\to 2} f(y)$$

例2 求 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cot^3 x}{2-\cot x-\cot^3 x}$。

解 原式 $\displaystyle=\lim_{y\to 1}\frac{1-y^3}{2-y-y^3}$

$$=\lim_{y\to 1}\frac{(1-y)(1+y+y^2)}{(1-y)(y^2+2y+2)}=\frac{3}{4}$$

取 $y=\cot x$

$$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)=\lim_{y\to 1} f(y)$$

例3 求 $\displaystyle\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$。

解 原式 $\displaystyle=\lim_{y\to 2}\frac{y^3-8}{y-2}$

$$=\lim_{y\to 2}(y^2+2y+4)$$

$=12$

取 $y=\sqrt[3]{x}$

（說明同例 2）

■二項展開式之應用

◎例1 求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}$。（$n$是正整數）

說明 利用二項展開式