第 6 章

Riemann-Stieltjes 積分

前章所介紹的 Riemann 積分，可以朝向幾種方向加以推廣，本章及下一章分別介紹其中的兩種。本章所要討論的 Riemann-Stieltjes 積分，乃是 Thomas Joannes Stieltjes（1856～1894，荷蘭人）在 1894 年討論某些連分數（continued fraction）的極限時所引進的。它可以將無窮級數與 Riemann 定積分引為它的特例，而且在**泛函分析**（functional analysis）上也有重要的應用。不過，後者的牽涉較廣，在本章中我們不討論這個問題。

6－1 定義與性質

Riemann-Stieltjes 積分的概念所討論的函數，乃是單實變數的有界實數值函數。因此，討論過程中當然會引用一維緊緻區間的分割。由於一維區間$[a,b]$的每個分割的分割區間都是依序地左右排列，所以，只需列出分割區間的端點$\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$，就已知分割為$\{[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]\}$。

若$P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$與$Q=\{a=y_0<y_1<\cdots<y_m=b\}$都是區間$[a,b]$的分割，則所謂分割 Q 是分割 P 的**細分**，乃是表示集

合$\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$是集合$\{y_0, y_1, \cdots, y_m\}$的子集。

甲、Riemann-Stieltjes 積分的定義

【定義 1】設$f, \alpha : [a, b] \to \boldsymbol{R}$是一維緊緻區間$[a, b]$上的兩個有界函數，而$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$是$[a, b]$的一個分割。對每個$i = 1, 2, \cdots, n$，$t_i$是區間$[x_{i-1}, x_i]$上任一點，則形如下式右端的和稱為函數 f 對函數α 對應於分割 P 的一個 **Riemann-Stieltjes 和**（Riemann-Stieltjes sum），以$S(f,\alpha,P)$表之，亦即：

$$S(f,\alpha,P) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}))\ 。$$

在 Riemann-Stieltjes 和的記號$S(f,\alpha,P)$中，沒有將點$t_1, t_2, \cdots, t_n$包含在內，所以，$S(f,\alpha,P)$也算是一個不完整的記號，這種現象與§5-1 定義 3(1)所定義的 Riemann 和$R(f,P)$相似。在下文中，讀者應隨時記得：$S(f,\alpha,P)$是指f對α 對應於 P 的**任意** Riemann-Stieltjes 和。

【定義 2】設$f, \alpha : [a, b] \to \boldsymbol{R}$是一維緊緻區間$[a, b]$上的兩個有界函數。若存在一個實數 s 使得下述性質成立：對每個正數ε，都可找到區間$[a, b]$的一個分割P_0使得：對於P_0的每個細分 P 以及函數 f 對函數α 對應於分割 P 的每個 Riemann-Stieltjes 和$S(f,\alpha,P)$，恆有$|S(f,\alpha,P) - s| < \varepsilon$，則稱函數 f 對函數α 在區間$[a, b]$上**可 Riemann-Stieltjes 積分**（Riemann-Stieltjes integrable），實數 s 稱為函數f對函數α 在$[a, b]$上的 **Riemann-Stieltjes 積分**（Riemann-Stieltjes integral）。f 對α 在$[a, b]$上的 Riemann-Stieltjes 積分若存在則必唯一（參看練習題 1），我們通常寫成

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)\ 。$$

函數f稱為此 Riemann-Stieltjes 積分的**被積分函數**（integrand），而函

數α 稱為**積分函數**（integrator）。

【例 1】（Riemann 積分是 Riemann-Stieltjes 積分的特殊情形）

若$\alpha(x)=x$，而f: $[a,b]\to \boldsymbol{R}$為任意有界函數，則所謂f 對α 在$[a,b]$上可 Riemann-Stieltjes 積分，乃是表示f在$[a,b]$上可 Riemann 積分，而且f 對α 在$[a,b]$上的Riemann-Stieltjes積分，就是f在$[a,b]$上的 Riemann 積分。 ||

【例 2】若 α ：$[a,b]\to \boldsymbol{R}$ 是常數函數，則對每個有界函數 f：$[a,b]\to \boldsymbol{R}$，函數f 對函數α 在$[a,b]$上都可 Riemann-Stieltjes 積分，而且 Riemann-Stieltjes 積分值都等於 0。事實上，f對α 對應於任何分割 P 的每個 Riemann-Stieltjes 和都等於 0。 ||

乙、Riemann-Stieltjes 積分的基本性質

本小節所介紹的七個性質，除定理 2 外，其餘在一維的 Riemann 積分也都成立，只需令$\alpha(x)=x$ 即可。定理 1 與定理 3 在 Riemann 積分中的對應性質，在§5-1 中我們採用上、下積分的方法來證明，這種證法在此處並不適用，因為當積分函數α 不是單調函數時，我們無法定義 Riemann-Stieltjes 型的上、下積分。

【定理 1】（Riemann-Stieltjes 積分對被積分函數呈線性）

設f_1, f_2 ,α ：$[a,b]\to \boldsymbol{R}$都是有界函數，$c_1, c_2\in \boldsymbol{R}$ 。若f_1 與f_2都對 α 在 $[a,b]$上可 Riemann-Stieltjes 積分，則$c_1f_1+c_2f_2$對 α 在$[a,b]$上也可 Riemann-Stieltjes 積分，而且

$$\int_a^b (\,c_1f_1(x)+c_2f_2(x)\,)\,d\alpha(x)=c_1\int_a^b f_1(x)\,d\alpha(x)+c_2\int_a^b f_2(x)\,d\alpha(x)。$$

證：設ε 為任意正數，令$\delta=\varepsilon/(|c_1|+|c_2|+1)$。因為函數$f_1$ 對函數 α 在$[a,b]$上可Riemann-Stieltjes積分，所以，對於正數δ ，可找到$[a,b]$的一個分割P_1使得：對於P_1的每個細分 P 以及 f_1 對 α 對應於 P 的每

個 Riemann-Stieltjes 和$S(f_1,\alpha,P)$，恆有

$$\left| S(f_1,\alpha,P) - \int_a^b f_1(x)\,d\alpha(x) \right| < \delta \text{ 。}$$

因為函數f_2 對函數 α 在$[a,b]$上可 Riemann-Stieltjes 積分，所以，對於正數δ ，可找到$[a,b]$的一個分割P_2使得：對於P_2的每個細分P以及f_2 對 α 對應於 P 的每個 Riemann-Stieltjes 和$S(f_2,\alpha,P)$， 恆有

$$\left| S(f_2,\alpha,P) - \int_a^b f_2(x)\,d\alpha(x) \right| < \delta \text{ 。}$$

令P_0表示P_1與P_2的一個共同細分，則P_0是$[a,b]$的一個分割。設分割P是分割P_0的一個細分，而$S(c_1f_1+c_2f_2,\alpha,P)$是函數$c_1f_1+c_2f_2$對函數 α 對應於分割P的一個 Riemann-Stieltjes 和，則P是P_1的一個細分、也是P_2的一個細分，而且

$$S(c_1f_1+c_2f_2,\alpha,P) = c_1S(f_1,\alpha,P) + c_2S(f_2,\alpha,P) \text{ 。}$$

請注意：上式表示$S(c_1f_1+c_2f_2,\alpha,P)$可寫成某個$S(f_1,\alpha,P)$與某個$S(f_2,\alpha,P)$的線性組合。綜和上述三式，可得

$$\begin{aligned}
&\left| S(c_1f_1+c_2f_2,\alpha,P) - c_1\int_a^b f_1(x)\,d\alpha(x) - c_2\int_a^b f_2(x)\,d\alpha(x) \right| \\
&\le |c_1| \left| S(f_1,\alpha,P) - \int_a^b f_1(x)\,d\alpha(x) \right| \\
&+ |c_2| \left| S(f_2,\alpha,P) - \int_a^b f_2(x)\,d\alpha(x) \right| \\
&\le (|c_1|+|c_2|)\delta < \varepsilon \text{ 。}
\end{aligned}$$

於是，$c_1f_1+c_2f_2$對 α 在$[a,b]$上可 Riemann-Stieltjes 積分，而且定理的等式成立。 ||

【定理 2】（Riemann-Stieltjes 積分對積分函數呈線性）

設f,α_1,α_2：$[a,b]\to \boldsymbol{R}$都是有界函數，$c_1,c_2\in \boldsymbol{R}$ 。若f 對 α_1與 α_2 都在$[a,b]$上可 Riemann-Stieltjes 積分，則f 對$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$在

$[a,b]$上也可 Riemann-Stieltjes 積分，而且

$$\int_a^b f(x)\,d(c_1\alpha_1(x)+c_2\alpha_2(x)) = c_1\int_a^b f(x)\,d\alpha_1(x) + c_2\int_a^b f(x)\,d\alpha_2(x) \text{ 。}$$

證：與定理 1 的證法類似，留為習題。 ||

【定理 3】（Riemann-Stieltjes 積分對積分區間的可加性）

設 $f,\alpha : [a,b]\to \boldsymbol{R}$ 為二有界函數，$c\in(a,b)$。若 f 對 α 在區間$[a,c]$與$[c,b]$上都可 Riemann-Stieltjes 積分，則 f 對 α 在$[a,b]$上可 Riemann-Stieltjes 積分，而且

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \int_a^c f(x)\,d\alpha(x) + \int_c^b f(x)\,d\alpha(x) \text{ 。}$$

證：設ε為任意正數，因為函數 f 對函數 α 在$[a,c]$上可 Riemann-Stieltjes 積分，所以，對於正數$\varepsilon/2$，可找到$[a,c]$的一個分割P_1使得：對於P_1的每個細分Q_1以及 f 對 α 對應於Q_1的每個 Riemann-Stieltjes 和$S(f,\alpha,Q_1)$，恆有

$$\left| S(f,\alpha,Q_1) - \int_a^c f(x)\,d\alpha(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ 。}$$

因為函數f對函數 α 在$[c,b]$上可 Riemann-Stieltjes 積分，所以，對於正數$\varepsilon/2$，可找到$[c,b]$的一個分割P_2使得：對於P_2的每個細分Q_2以及f對 α 對應於Q_2的每個 Riemann-Stieltjes 和$S(f,\alpha,Q_2)$，恆有

$$\left| S(f,\alpha,Q_2) - \int_c^b f(x)\,d\alpha(x \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ 。}$$

令$P_0 = P_1\cup P_2$，則P_0是區間$[a,b]$的一個分割且$c\in P_0$。設 Q 是分割P_0的一個細分，令$Q_1 = Q\cap[a,c]$且$Q_2 = Q\cap[c,b]$，則$[a,c]$的分割Q_1是分割P_1的細分，而且$[c,b]$的分割Q_2是分割P_2的細分。設$S(f,\alpha,Q)$是函數f對函數 α 對應於分割 Q 的一個 Riemann-Stieltjes 和，則$S(f,\alpha,Q)$可表示成兩個 Riemann-Stieltjes 和$S(f,\alpha,Q_1)$與$S(f,\alpha,Q_2)$的和。於是，可得

$$\left| S(f,\alpha,Q) - \int_a^c f(x)\,d\alpha(x) - \int_c^b f(x)\,d\alpha(x) \right|$$
$$= \left| S(f,\alpha,Q_1) + S(f,\alpha,Q_2) - \int_a^c f(x)\,d\alpha(x) - \int_c^b f(x)\,d\alpha(x) \right|$$
$$\leq \left| S(f,\alpha,Q_1) - \int_a^c f(x)\,d\alpha(x) \right| + \left| S(f,\alpha,Q_2) - \int_c^b f(x)\,d\alpha(x) \right|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ 。}$$

於是，f 對 α 在 $[a,b]$ 上可 Riemann-Stieltjes 積分，而且定理的等式成立。‖

【定理 4】（將積分區間縮小）

設 $f,\alpha:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ 為有界函數，$[c,d]\subset[a,b]$。若 f 對 α 在 $[a,b]$ 上可 Riemann-Stieltjes 積分，則 f 對 α 在子區間 $[c,d]$ 上也可 Riemann-Stieltjes 積分。

證：本定理不能仿照定理 3 的方法來證明，我們留給讀者使用定理 8 的 Cauchy 條件給以證明，參看練習題 5。‖

Riemann-Stieltjes 積分的概念涉及被積分函數與積分函數，我們當然想知道這兩個函數的角色是不是可以對調？下面的定理 5 就討論這個問題。在定理 5 的等式中，若有關的函數滿足本節定理 7 的條件，則定理 5 的等式就是 Riemann 定積分中的分部積分法。所以，我們把定理 5 稱為 Riemann-Stieltjes 積分的**分部積分法**(integration by parts)。

【定理 5】（Riemann-Stieltjes 積分的分部積分法）

設 $f,\alpha:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ 為二有界函數。若 f 對 α 在 $[a,b]$ 上可 Riemann-Stieltjes 積分，則 α 對 f 在 $[a,b]$ 上也可 Riemann-Stieltjes 積分，而且

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha(x)\,df(x) \text{ 。}$$

證：設 ε 為任意正數。因為 f 對 α 在 $[a,b]$ 上可 Riemann-Stieltjes 積

分，所以，對於正數 ε，可找到 $[a,b]$ 的一個分割 P_0 使得：對於 P_0 的每個細分 P 以及 f 對 α 對應於分割 P 的每個 Riemann-Stieltjes 和 $S(f,\alpha,P)$，恆有

$$\left| S(f,\alpha,P) - \int_a^b f(x)\,d\alpha(x) \right| < \varepsilon 。 \qquad (*)$$

設 $Q=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ 是分割 P_0 的一個細分而

$$S(\alpha,f,Q)=\sum_{i=1}^{n}\alpha(t_i)\,(f(x_i)-f(x_{i-1}))$$

是函數 α 對函數 f 對應於分割 Q 的一個 Riemann-Stieltjes 和。因為

$$f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)=\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)\alpha(x_i)-f(x_{i-1})\alpha(x_{i-1}))，$$

所以，可得

$$\begin{aligned} &f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)-S(\alpha,f,Q)\\ &\qquad=\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})(\alpha(t_i)-\alpha(x_{i-1}))+\sum_{i=1}^{n}f(x_i)(\alpha(x_i)-\alpha(t_i)) 。\end{aligned}$$

根據上式右端的表示法，可知此式是函數 f 對函數 α 對應於分割 P_0 的細分 $P=\{a=x_0\le t_1\le x_1\le t_2\le x_2\le\cdots\le t_n\le x_n=b\}$ 的一個 Riemann-Stieltjes 和。於是，依(*)式，可得

$$\left| f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)-S(\alpha,f,Q)-\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) \right| < \varepsilon 。$$

由此可知：函數 α 對函數 f 在 $[a,b]$ 上可 Riemann-Stieltjes 積分，而且

$$\int_a^b \alpha(x)\,df(x)=f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)-\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) 。$$

這就是所欲證的結果。‖

【定理 6】（Riemann-Stieltjes 積分的變數代換法）

若函數 $f:[c,d]\to\boldsymbol{R}$ 對函數 $\alpha:[c,d]\to\boldsymbol{R}$ 在區間 $[c,d]$ 上可

Riemann-Stieltjes 積分，而函數g：$[a,b]\to[c,d]$是嚴格單調的連續函數，則函數$f\circ g$對函數$\alpha\circ g$在$[a,b]$上可 Riemann-Stieltjes 積分，而且

$$\int_a^b (f\circ g)(x)\,d(\alpha\circ g)(x)=\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,d\alpha(y)\text{ 。}$$

證：我們設g是嚴格遞增的連續函數而且$c=g(a)$、$d=g(b)$。於是，依§3-5 定理 16⑵，可知$g([a,b])=[c,d]$。

設ε為任意正數，因為f對 α 在$[c,d]$上可 Riemann-Stieltjes 積分，所以，對於正數ε，可找到$[c,d]$的一個分割Q_0使得：對於Q_0的每個細分 Q 以及 f 對 α 對應於分割 Q 的每個 Riemann-Stieltjes 和 $S(f,\alpha,Q)$，恆有

$$\left|S(f,\alpha,Q)-\int_c^d f(y)\,d\alpha(y)\right|<\varepsilon\text{ 。}\qquad(*)$$

令$P_0=\{g^{-1}(y)\mid y\in Q_0\}$，則$P_0$是$[a,b]$的一個分割。對於分割$P_0$的任意細分$P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$，令$Q=\{c=g(x_0)<g(x_1)<\cdots<g(x_n)=d\}$。因為$g$是嚴格遞增函數，所以，$Q$是$[c,d]$的分割而且它是$Q_0$的一個細分。設

$$S(f\circ g,\alpha\circ g,P)=\sum_{i=1}^{n}(f\circ g)(t_i)((\alpha\circ g)(x_i)-(\alpha\circ g)(x_{i-1}))$$

為函數$f\circ g$對函數$\alpha\circ g$對應於分割 P 的一個 Riemann-Stieltjes 和。因為

$$S(f\circ g,\alpha\circ g,P)=\sum_{i=1}^{n}(f(g(t_i))(\alpha(g(x_i))-\alpha(g(x_{i-1}))))$$

而且我們可由函數 g 的嚴格遞增性得知：$g(t_i)\in[g(x_{i-1}),g(x_i)]$，$i=1,2,\cdots,n$，所以，$S(f\circ g,\alpha\circ g,P)$等於函數$f$對函數α 對應於分割$Q$的一個 Riemann-Stieltjes 和。於是，依(*)式，可得

$$\left|S(f\circ g,\alpha\circ g,P)-\int_c^d f(y)\,d\alpha(y)\right|<\varepsilon\text{ 。}$$

由此可知：函數 $f\circ g$ 對函數 $\alpha\circ g$ 在 $[a,b]$ 上可 Riemann-Stieltjes 積分，而且定理的等式成立。 ||

請注意：當定理 6 中的函數 g 是嚴格遞減函數時，定理等式右端的 Riemann-Stieltjes 積分的上限小於下限，它所指的意義與定積分的情況相同，亦即：

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, d\alpha(y) = -\int_{g(b)}^{g(a)} f(y)\, d\alpha(y) \text{ 。}$$

【定理 7】（化成 Riemann 積分來計算）

設 $f,\alpha : [a,b]\to \boldsymbol{R}$ 為二有界函數。若函數 f 對函數 α 在 $[a,b]$ 上可 Riemann-Stieltjes 積分，且函數 α 在 $[a,b]$ 上連續可微分，則函數 $f\alpha'$ 在 $[a,b]$ 上可 Riemann 積分，而且

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x)\, dx \text{ 。}$$

證：設 ε 為任意正數，因為 f 對 α 在 $[a,b]$ 上可 Riemann-Stieltjes 積分，所以，對於正數 $\varepsilon/2$，可找到 $[a,b]$ 的一個分割 P_1 使得：對於 P_1 的每個細分 P 以及 f 對 α 對應於 P 的每個 Riemann-Stieltjes 和 $S(f,\alpha,P)$，恆有

$$\left| S(f,\alpha,P) - \int_a^b f(x)\, d\alpha(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ 。}$$

因為 f 在 $[a,b]$ 上有界，所以，必可找到一個正數 M 使得每個 $x\in[a,b]$ 都滿足 $|f(x)|\le M$。因為 α' 在 $[a,b]$ 上連續，所以，α' 在 $[a,b]$ 上均勻連續。於是，對於正數 $\varepsilon/(2M(b-a))$，必可找到一正數 δ 使得：當 $s,t\in[a,b]$ 且 $|s-t|<\delta$ 時，恆有 $|\alpha'(s)-\alpha'(t)|<\varepsilon/(2M(b-a))$。選取分割 P_1 的一個細分 P_0 使得 $|P_0|<\delta$。設分割 $P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ 是分割 P_0 的一個細分，而

$$R(f\alpha', P) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\alpha'(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

是函數 $f\alpha'$ 對分割 P 的一個 Riemann 和。令

$$S(f,\alpha,P)=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1}))\text{ 。}$$

對每個 $i=1,2,\cdots,n$ ，因為函數 α 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上連續且在 (x_{i-1},x_i) 上可微分，所以，依 Lagrange 均值定理，可找到一個 $s_i\in(x_{i-1},x_i)$ 使得 $\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})=\alpha'(s_i)(x_i-x_{i-1})$ 。更進一步地，因為 $|s_i-t_i|\le |P|\le|P_0|<\delta$ ，所以，$|\alpha'(s_i)-\alpha'(t_i)|<\varepsilon/(2M(b-a))$ 。於是，可得

$$\begin{aligned}
&\left|R(f\alpha',P)-\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\right|\\
&\le\left|R(f\alpha',P)-S(f,\alpha,P)\right|+\left|S(f,\alpha,P)-\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\right|\\
&\le\sum_{i=1}^{n}|f(t_i)||\alpha'(t_i)-\alpha'(s_i)|(x_i-x_{i-1})+\frac{\varepsilon}{2}\\
&\le\sum_{i=1}^{n}M\cdot\frac{\varepsilon}{2M(b-a)}\cdot(x_i-x_{i-1})+\frac{\varepsilon}{2}\\
&=\varepsilon\text{ 。}
\end{aligned}$$

由此可知：函數 $f\alpha'$ 在 $[a,b]$ 上可 Riemann 積分，而且定理的等式成立。‖

前面所提的七個定理，除定理 4 外，其餘各定理都對 Riemann-Stieltjes 積分值的計算頗為有用。不過，還得配合下面定理 10 與§6-2 定理 13 所介紹的存在性條件。

丙、Riemann-Stieltjes 可積分性的條件

【定理 8】（Riemann-Stieltjes 可積分性的 Cauchy 條件）

若 $f,\alpha:[a,b]\to\boldsymbol{R}$ 為二有界函數，則 f 對 α 在 $[a,b]$ 上可 Riemann-Stieltjes 積分的充要條件是：對每個正數 ε ，都可找到 $[a,b]$ 的一個分割 P_0 使得：對於 P_0 的每對細分 P 與 Q，以及 f 對 α 分別對