第 1 章

微　分

本章重點

1 導數
2 微分的方法
3 指數與對數函數之導數
4 連鎖率
5 隱微分
6 高階導數

應用範圍

1 計算最大利潤
2 計算最小成本
3 最佳化問題之處理
4 複雜函數之推導

欲求$y=f(x)$圖形上，某一點$P\,(x_0, f\,(x_0))$之切線的斜率，可先設定圖形上鄰近P之另一點$Q\ (x_0+\Delta x, f\ (x_0+\Delta x))$，其中$\Delta x$為點$P$與點$Q$之$x$座標上的微增量，則線段$\overline{PQ}$之斜率$m$，定義為：

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{x_0}$$

當$\Delta x\to 0$，則Q點非常接近於P點，則線段$\overline{PQ}$之斜率就趨近於此圖形在P點之斜率，因而可定義：在圖形上某一點$P\,(x_0, f\,(x_0))$的切線斜率為

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{x_0} \tag{1}$$

(1)式也稱作f函數在x之導數，並記作$f'(x)$。當求f在x處之微分，即是求f在點$(x, f(x))$之導數。

1 導數

為了方便，對於函數$f(x)=y$之「導數」寫作$\dfrac{dy}{dx}$或$f'(x)$。此符號稱之為「y對x之導數」，當$x=c$時的導數，記之為

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=c}$$

微分的基本觀念來自於「極限」的理論，此部分冗長贅敘，僅以下述各定理，介紹微分的方法。

2 微分的方法

定理 2-1

常數函數 $f(x)=k$ 之導數為「0」，亦即 $f'(x)=0$ 或 $\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}k=0$

定理 2-2

對於冪函數（即 $f(x)=x^n$，n 為實數），其導數 $f'(x)=nx^{n-1}$ 或 $\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$

例 2-1

試求以下各函數之導數：

(1) $f(x)=5$

(2) $f(x)=x^7$

(3) $f(x)=x^{\frac{5}{2}}$

(4) $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{x^3}$

解

(1) $\frac{d}{dx}(5)=0$

(2) $\frac{d}{dx}x^7=7x^6$

(3) $\frac{d}{dx}x^{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$

(4) $\frac{d}{dx}\frac{\sqrt[3]{x}}{x^3}=\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{3}-3}=\frac{d}{dx}x^{-\frac{8}{3}}=-\frac{8}{3}x^{-\frac{11}{3}}$

定理 2-3

若函數f和g在所有的x皆可微，且a, b, c為任意實數，則$f\pm g, fg, f/g$及cg之導數運算如下：

(1)$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$

(2)$[f(x)g(x)]'=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$

(3)$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

(4)$[cg(x)]'=cg'(x)$

定理 2-4　延伸之微分

設$f_1, f_2, \cdots, f_k$為在x之可微之函數，$a_1, \cdots, a_k$為任意常數，則

$$\frac{d}{dx}[a_1f_1+a_2f_2+\cdots+a_kf_k]=a_1\frac{df_1}{dx}+a_2\frac{df_2}{dx}+\cdots+a_k\frac{df_k}{dx}$$

例 2-2

試求下列各函數之導數：

(1)$f(x)=3x^2-6\sqrt{x}$

(2)$p(x)=(7+2x+3x^2)(5x^3-6)$

(3)$g(x)=\dfrac{5x-3}{4x^2+3}$

(4)$q(x)=(8x^2+3)^2$

(5)$r(x)=\dfrac{5}{3x^2}-\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{2}{5}-\dfrac{x^2-1}{x}$

解

(1)$f'(x)=6x-\dfrac{6}{2}x^{-\frac{1}{2}}=6x-\dfrac{3}{\sqrt{x}}$

(2) $P'(x)=(7+2x+3x^2)(15x^2)+(2+6x)(5x^3-6)$

(3) $g'(x)=\dfrac{(4x^2+3)(5)-(5x-3)(8x)}{(4x^2+3)^2}$

$=\dfrac{20x^2+15-40x^2+24x}{(4x^2+3)^2}$

$=\dfrac{-20x^2+24x+15}{(4x^2+3)^2}$

(4) $q'(x)=(8x^2+3)(16x)+16x(8x^2+3)$

$=32x(8x^2+3)$

(5) $r'(x)=\dfrac{-5\times 6x}{9x^4}-\dfrac{2x}{3}-\dfrac{x(2x)-(x^2-1)}{x^2}$

$=\dfrac{-10}{3x^3}-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{x^2+1}{x^2}$

定理 2-5　切線斜率

設 $P\ (x_0,\ f\ (x_0))$為曲線上的某一點，則經過此點在曲線上 P 點的切線斜率 m 為 $f'(x)|_{x=x_0}$，此切線方程式為 $m(x-x_0)=y-f(x_0)$

例 2-3

試求 $f(x)=x^2$，在 $P\ (-1,\ 1)$點之斜率及切線方程式。

解

斜率 $m=f'(x)|_{x=-1}=2x|_{x=-1}=-2$

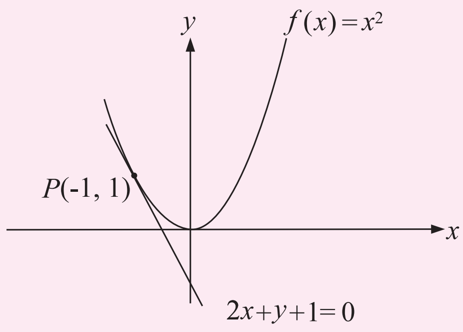
∴切線方程式為

$-2\ (x+1)=y-1$

$-2x-y-1=0$

$2x+y+1=0$

其圖形為



3 指數與對數函數之導數

定理 3-1　自然對數之導數

自然指數 e^x 對所有的 x 皆為可微函數，則 $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

例 3-1

求以下各函數之導數：

(1) $f(x) = 5e^x$

(2) $f(x) = 5e^x + 8x^2$

(3) $g(x) = \frac{2e^x}{3x+5}$

(4) $g(x) = 2e^x \times x$

解

(1) $f'(x) = 5 \times \frac{d}{dx}e^x = 5e^x$

(2) $f'(x) = \frac{d}{dx}[5e^x + 8x^2]$

$= 5e^x + 8\frac{d}{dx}x^2$

$=5e^x+16x$

(3)$g'(x)=\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{2e^x}{3x+5}\right]$

$=\dfrac{(3x+5)\dfrac{d}{dx}(2e^x)-2e^x\dfrac{d}{dx}[3x+5]}{(3x+5)^2}$

$=\dfrac{(3x+5)(2e^x)-6e^x}{(3x+5)^2}$

$=\dfrac{6xe^x+10e^x-6e^x}{(3x+5)^2}$

$=\dfrac{6xe^x+4e^x}{(3x+5)^2}$

(4)$g'(x)=\dfrac{d}{dx}[2e^x\times x]$

$=2e^x\dfrac{d}{dx}x+2\dfrac{de^x}{dx}\times x$

$=2e^x+2xe^x$

$=2e^x(1+x)$

定理 3-2　自然對數之導數

$\ln x$ 稱為自然對數，對於 $x>0$ 皆為可微，其導數為 $\dfrac{d}{dx}(\ln x)=\dfrac{1}{x}$

例 3-2

試求以下各對數函數之導數：

(1)$f_1(x)=\ln x+x^2$

(2)$f_2(x)=\dfrac{3x+5}{2\ln x}$

(3)$f_3(x)=(\ln x)(5x^2+3x+2)$

(4)$f_4(x)=5x^2\ln x$

解

(1)$f_1'(x)=\dfrac{1}{x}+2x$

$$(2)f_2'(x)=\frac{2\ln x\times(3)-(3x+5)\times\dfrac{2}{x}}{(2\ln x)^2}$$

$$=\frac{6\ln x-6-\dfrac{10}{x}}{4(\ln x)^2}$$

$$(3)f_3'(x)=\ln x(10x+3)+\frac{1}{x}(5x^2+3)$$

$$=10x\ln x+3\ln x+5x+\frac{3}{x}$$

$$(4)f_4'(x)=5x^2\times\frac{1}{x}+5\ln x\times(2x)$$

$$=5x+10x\ln x$$

4 連鎖律

若是 $f(u)$ 是 u 的函數，而 u 又是 x 的函數，則 $f(u)$ 對於 x 之導數，應該如何執行？本節即欲介紹各種求導數之連鎖率。

定理 4-1　連鎖律

若 $y=f(u)$ 是 u 的可微函數，且 u 是 x 的可微函數，亦即 $y=f(u(x))$ 是 x 的可微函數，則其導數為

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

例 4-1

設 $y=2u^4-3u^2+5u-6$

$u=3x^3+2x+5$，試求 $\dfrac{dy}{dx}$

解

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$
$$=(8u^3-6u+5)(9x^2+2)$$
$$=(8(3x^3+2x+5)^3-6(3x^3+2x+5)+5)(9x^2+2)$$

例 4-2

令 $g(x)=\sqrt[3]{\frac{x^2}{1-3x}}$

求 $\frac{dg(x)}{dx}$

解

設 $u=\left(\frac{x^2}{1-3x}\right)$，則

$$g(x)=u^{\frac{1}{3}}$$
$$\frac{dg(x)}{dx}=\frac{dg(x)}{du}\frac{du}{dx}$$
$$=\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}\times\frac{(1-3x)\times 2x-x^2(-3)}{(1-3x)^2}$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{x^2}{1-3x}\right)^2}}\times\frac{2x-6x^2+3x^2}{(1-3x)^2}$$
$$=\frac{2x-3x^2}{3\sqrt[3]{x^4(1-3x)^4}}=\frac{2-3x}{3\sqrt[3]{x(1-3x)^4}}$$

5 隱微分

有些情形，變數 x 與 y，無法表現成 $y=f(x)$ 之型態，因此也無法以連鎖律求導數，此種情形可用隱微分之方式求導數。

例 5-1

設 $x^2+y^2=2$，試求 $\frac{dy}{dx}$

解

以 x 對於 $x^2+y^2=2$ 之左、右兩端分別求導數，則

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2)=\frac{d}{dx}(2)$$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}=-\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}$$

例 5-2

設 $x^3y^2+5y^3-x+8=0$

試求 $\frac{dy}{dx}$

解

由隱微分方法

$$\frac{d}{dx}(x^3y^2+5y^3-x+8)=0$$

$$x^3\frac{d}{dx}(y^2)+\frac{d}{dx}(x^3)\times y^2+5\frac{d}{dx}y^3-\frac{d}{dx}x+\frac{d}{dx}(8)=0$$

$$x^3\times 2y\frac{dy}{dx}+3x^2y^2+15y^2\frac{dy}{dx}-1=0$$

$$(2x^3y+15y^2)\frac{dy}{dx}=1-3x^2y^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-3x^2y^2}{2x^3y+15y^2}$$

例 5-3

求 $x^2+y^2=17$ 在點(4, 1)上的切線斜率及切線方程式。