

第一章

基本概念





1-1 前言

一、材料力學之意涵

材料力學為可變形體力學，主要視物體為變形體，著重於物體之內效應分析，即探討物體受力後之變形行為和破壞模式。

二、材料力學之基本三大原則

- (一) 力系之平衡。
- (二) 變形一致性。
- (三) 應力和應變之關係。

三、常用構件及內力型式

- (一) 軸向桿件：主要內力為拉力或壓力等軸向力。
- (二) 扭力：主要內力為扭矩。
- (三) 樑：主要內力為彎矩，其次為剪力。
- (四) 長柱：軸向力（大部分是壓力）。

1-2 應力

一、應力之定義及其種類

- (一) 材料受外力作用，內部產生抵抗之內力，而單位面積所受之內力，稱為應力（stress）。一般應力分為正向（交）應力和剪應力兩大類。
- (二) 材料所受外力（負荷）之種類：
 1. 集中負荷。
 2. 分布負荷。
 3. 靜態負荷：負荷作用於材料上，不隨時間而改變。
 4. 動態負荷：負荷作用於材料上，隨時間而改變。

二、正向應力

(一) 作用力與作用面互相垂直之應力，稱為正向應力 (σ)。

(二) 公式：

1. $\sigma = \frac{P}{A}$ ，其中 P 為垂直作用面之力， A 為承受作用力之截面積。

2. 公式成立之三原則：

- (1) 作用桿件需為直桿且均質。
- (2) 作用力需通過作用面之形心。
- (3) 截面選定應遠離施力點。

(三) 單位：

1. σ : $N/m^2 = Pa$, $lb/in^2 = psi$, kg/cm^2 。

2. P : N , lb , kg 。

3. A : m^2 , in^2 , cm^2 。

(四) 若 P 為拉力，其應力稱為拉應力，視為正，如圖 1-1。若 P 為壓力，其應力稱為壓應力，視為負，如圖 1-2。



圖 1-1

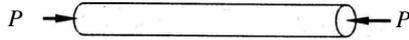


圖 1-2

三、剪應力

(一) 作用力與作用面互相平行之應力，稱為剪應力，如圖 1-3 所示。

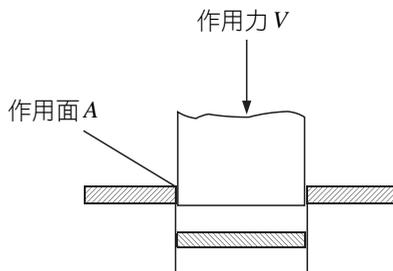


圖 1-3





(二) 常見剪應力之型式：

1. 單剪型式： $\tau = \frac{V}{A}$ ，如圖 1-4 所示。
2. 雙剪型式： $\tau = \frac{V}{2A}$ ，如圖 1-5 所示。

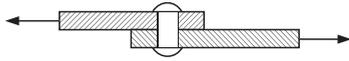


圖 1-4

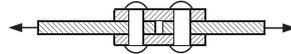


圖 1-5



1-3 應變

一、應變之定義

材料受力作用，單位長度或單位體積產生之變形量，稱為應變 (strain)。

二、軸向應變

- (一) 材料受軸向力 (拉力或壓力) 作用產生伸長或縮短，而單位長度產生之變形量，稱為軸向應變 (ε)，或稱正交應變 (normal strain)。
- (二) 公式： $\varepsilon = \frac{\delta}{L}$ ，其中 δ 為伸長或縮短量， L 為材料受力前原長度。
- (三) 單位：
 1. ε ：無單位，或 m/m 、 cm/cm 、 mm/mm 、 ft/ft 、 in/in 。
 2. δ ： m 、 cm 、 mm 、 ft 、 in 。
 3. L ： m 、 cm 、 mm 、 ft 、 in 。

三、橫向應變

- (一) 材料受軸向力作用產生伸長或縮短時，造成與材料受力之垂直方向產生縮短或伸長之應變，稱為橫向應變 (ε_d)，或稱側向應變。
- (二) 公式： $\varepsilon_d = \frac{\delta_d}{L_d}$ ，其中 δ_d 為材料受力之垂直方向變形量， L_d 為材料受力之垂直方向原長度。

(三) 單位：

1. ε_d ：無單位，或 m/m 、 cm/cm 、 mm/mm 、 ft/ft 、 in/in 。
2. δ_d ： m 、 cm 、 mm 、 ft 、 in 。
3. L_d ： m 、 cm 、 mm 、 ft 、 in 。

四、蒲松比

(一) 材料受軸向力產生伸長，而同時材料橫切方向產生收縮，而收縮應變與伸長應變之絕對比值稱為蒲松比 (ν)，亦是橫向應變與軸向應變之絕對比值。

(二) 公式：
$$\nu = \left| \frac{\text{橫向應變}}{\text{軸向應變}} \right| = \left| \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon} \right|$$

(三) 一般材料之蒲松比不得超過 0.5，而金屬材料之蒲松比為 0.25~0.35。

五、剪應變

(一) 材料受側向力（剪力）作用產生側向變形，而單位長度產生之側向變形量，稱為剪應變 (shear strain)，或稱側向應變。

(二) 公式：剪應變 $= \frac{\delta}{L} = \tan \gamma \approx \gamma$ ，其中 δ 為側向變形量， L 為材料受力長度。

(三) 單位：

1. γ ：無單位，或 m/m 、 cm/cm 、 mm/mm 、 ft/ft 、 in/in 。
2. δ ： m 、 cm 、 mm 、 ft 、 in 。
3. L ： m 、 cm 、 mm 、 ft 、 in 。



1-4 應力與應變之關係

一、應力與應變圖

(一) 一般可藉由圓形桿件，利用拉力試驗機作拉力試驗決定，繪成應力應變圖，如圖 1-6 所示。



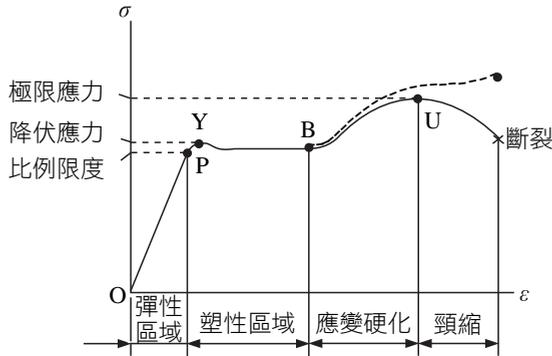


圖 1-6 典型之結構用鋼之應力應變圖

(二) 重要名詞之定義及其特性：

1. 比例限度 (proportional limit)：圖中之 P 點，為應力與應變保持線性關係之最大應力。
2. 彈性限度 (elastic limit)：彈性材料受力後，能恢復原材料形狀之最大應力。當超出此應力，外力除去後，無法恢復原材料形狀，稱為永久變形 (permanent set)。一般金屬材料之比例限度與彈性限度相同，而橡皮類材料之彈性限度大於比例限度很多。
3. 降伏點 (yielding point)：圖中之 Y 點，當應力增加至此點，應力不再增加 (或略為減少)，但應變量卻增加很多，此點之應力稱為降伏應力或屈伏應力，一般以 σ_y 表示，延性材料設計以此應力除以安全係數作為容許應力。
4. 極限應力 (ultimate stress)：圖中之 U 點，材料所能承受之最大應力，此點之應力稱為極限應力，一般以 σ_u 表示，脆性材料設計以此應力除以安全係數作為容許應力。
5. 彈性區域 (elastic range)：圖中 O 點至 P 點，應力與應變成正比之區域。
6. 塑性區域 (plastic range)：圖中 Y 至 B 點，應力與應變不成正比之區域。
7. 應變硬化：圖中 B 至 U 點區域，應變硬化使材料承受應力之能力增加。
8. 頸縮：材料超過極限應力後，應力減少，應變急速增加，產生頸縮現象而斷裂。

二、延性材料與脆性材料之應力應變圖比較

(一) 延性材料之特性：

1. 材料斷裂前，先產生頸縮現象。
2. 部分延性材料降伏點不明顯，常採用 0.2% 永久應變橫距法求得。
3. 鋁之應力與應變圖。

(二) 脆性材料之特性：

1. 材料在極限應力產生斷裂無頸縮現象。
2. 鑄鐵之應力與應變圖，如圖 1-8 所示。

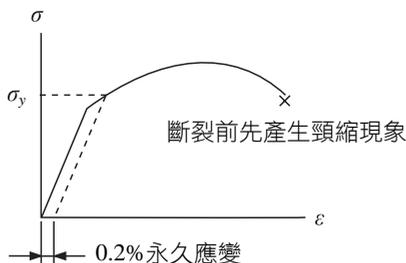


圖 1-7 鋁之應力與應變圖

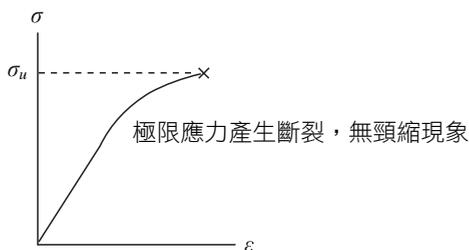


圖 1-8 鑄鐵之應力與應變圖

三、虎克定律

- (一) 在比例限度內，應力與應變保持正比例關係，稱為虎克定律。
- (二) 正向應力與軸向應變之關係： $\sigma = E\varepsilon$ ，其中 E 為楊氏模數或彈性模數。
- (三) 楊氏模數 E 在應力應變圖中表示其斜率，在比例限度內為一常數。
- (四) 剪應力與剪應變之關係： $\tau = \gamma G$ ，其中 G 為剛性模數或剪力彈性模數。





- (五) 剛性模數 G 在剪應力應變圖中表示其斜率，在比例限度內為一常數。
 (六) E (楊氏係數)、 G (剪力彈性模數)、 ν (蒲松比) 三者之間的關

$$\text{係式：} G = \frac{E}{2(1+\nu)}。$$

四、軸向力與變形量

- (一) 軸向力與應力之關係： $\sigma = \frac{P}{A}$ 。
 (二) 應力與應變之關係： $\sigma = E\varepsilon$ (需在比例限度內)。
 (三) 應變與總應變量之關係： $\varepsilon = \frac{\delta}{L}$ 。
 (四) 由(一)~(三)可推得： $\sigma = E\varepsilon = \frac{E\delta}{L} = \frac{P}{A} \Rightarrow \delta = \frac{PL}{AE}$

其中 AE 稱作軸向剛度 (axial rigidity)， AE 愈大，變形抵抗愈大。

- (五) 構件分成數段，由不同軸向力 P_i 、不同長度 L_i 、不同斷面積 A_i 及不同材質 E_i 之總應變量 $\delta = \sum_{i=1}^n \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$ 。
 (六) 構件之軸向力 P_x 及斷面積 A_x 隨軸向長度 x 而變化，其應變量 δ 為

$$\delta = \int_0^L d\delta = \int_0^L \frac{P_x}{A_x E} dx。$$

五、容許應力與安全係數

- (一) 一般材料在設計時，為使各構件安全，使用之應力通常低於降伏或極限應力甚多，考慮在彈性限度內，防止永久變形產生。設計時所使用之應力，稱為容許應力或工作應力 (allowable stress or working stress)，一般以 σ_{all} 或 σ_w 表示。
 (二) 安全係數 (factor of safety)：

1. 延性材料之安全係數：採用降伏應力除以容許應力，即 $F.S. = \frac{\sigma_y}{\sigma_w}$ 。
2. 脆性材料之安全係數：採用極限應力除以容許應力，即 $F.S. = \frac{\sigma_u}{\sigma_w}$ 。

六、三軸向應力與應變

- (一) 當一構件三軸向皆受軸向應力 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 作用時，其三軸向之應變分別為：

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

(二) 體應變 $\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - 1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ (高次項忽略)

$$\therefore \varepsilon_v = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

(三) 體積模數 (bulk modulus) $K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$ 。

七、真應力與真應變

(一) 真應力 (true stress) : $\sigma_t = \frac{P}{A'}$, 其中 A' 為變形後之面積。

(二) 真應變 (true strain) : $\varepsilon_t = \ln \frac{L'}{L}$, 其中 L' 為變形後之長度。

八、工程應力與工程應變

(一) 若依原斷面面積 (A) 及長度 (L) 計算之應力與應變, 稱之為工程應力與工程應變。

(二) 工程應力 (engineering stress) : $\sigma = \frac{P}{A}$ 。

(三) 工程應變 (engineering strain) : $\varepsilon = \frac{\delta}{L}$ 。

九、設計時採用工程應力而不採用真應力計算之理由

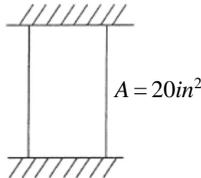
(一) 真應力計算時必須採用實際變形之斷面積, 但此斷面積往往無法得到或量測。

(二) 由於真應力之值往往比標稱應力之值為高, 考量實際結構之安全性及使用性, 故必須採行較為保守之工程應力來計算。



$\alpha = 13 \times 10^{-6}/^{\circ}F$ ，則桿件內最終軸向應力為何？

- (A)4550psi (B)3800psi
(C)2600psi (D)2450psi



【98年經濟部國營事業】

▶▶【解析】

$$\because \delta = \alpha L \Delta T, \text{ 且 } \sigma = E \varepsilon = E \frac{\delta}{L} \Rightarrow \delta = \frac{\sigma L}{E}$$

$$\therefore \alpha L \Delta T = \frac{\sigma L}{E} \Rightarrow \sigma = \alpha E \Delta T = 13 \times 10^{-6} \times 10 \times 10^6 \times 35 = 4550 \text{ psi}$$

- () 19. 一鋁棒長 $5m$ ，截面積為 $10cm \times 10cm$ ，若對強度之要求為內應力不得大於 $\sigma = 5000kg/cm^2$ ，對勁度之要求為伸長量 δ 不得大於 $0.2cm$ ，則該鋁棒所能承受的最大負荷為何？（設 $E = 10 \times 10^6 kg/cm^2$ ）
(A)700t (B)600t
(C)500t (D)400t

【98年經濟部國營事業】

▶▶【解析】

條件一：內應力不得大於 $\sigma = 5000kg/cm^2$

$$\therefore \sigma = \frac{P}{A} \Rightarrow P = \sigma A = 5000 \times (10 \times 10) = 500000kg = 500t$$

條件二：伸長量 δ 不得大於 $0.2cm$

$$\therefore \delta = \frac{PL}{EA} \Rightarrow P = \frac{\delta EA}{L} = \frac{0.2 \times 10 \times 10^6 \times (10 \times 10)}{500} = 400000kg = 400t$$

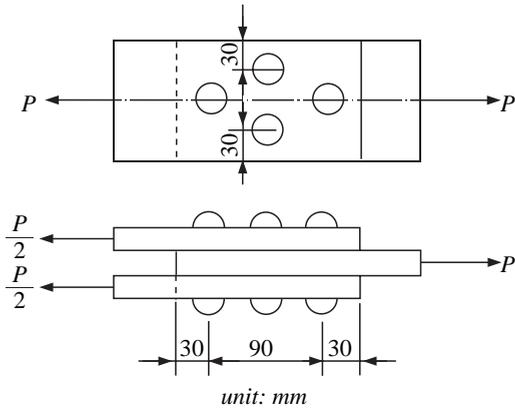
因此，該鋁棒所能承受的最大負荷為 $P_{max} = \min(500t, 400t) = 400t$



1-8 模擬試題演練

一、選擇題

- () 1. 一高壓容器內徑 $400mm$ ，容器內壓力 $6kg/cm^2$ ，其端部以凸緣用 8 支根徑為 $20mm$ 之螺栓，試求每支螺栓所產生之拉應力大小？
(A)0.677kg/mm² (B)1.5kg/mm²
(C)3kg/mm² (D)6kg/mm²



►► 【解析】

以鉚釘之剪力為設計基準，則最大容許拉力 P 為：

$$\tau_{all} = \frac{P}{nA} \Rightarrow P = nA\tau_{all} = 4 \times \left(2 \times \frac{\pi \times 20^2}{4} \right) \times 103 = 258867 \text{ (N)}$$

- () 4. 如上題，平板最大容許壓應力為 275 N/mm^2 ，如以平板之壓碎為設計基準，求最大容許拉力 P 為何？
 (A) 201000N (B) 264000N
 (C) 395000N (D) 428000N

►► 【解析】

以平板之壓碎為設計基準，則最大容許拉力 P 為：

$$\sigma_{all} = \frac{P}{nA} \Rightarrow P = nA\sigma_{all} = 4 \times (20 \times 12) \times 275 = 264000 \text{ (N)}$$

- () 5. 如圖所示，一鋼筋的部分長 L 埋入混凝土塊內，試求使鋼筋在容許正交應力 σ 完全發揮時，最短的埋置長度 L ？（假設鋼筋與混凝土間的平均容許黏接應力為 τ ）
 (A) $\frac{\sigma d}{4L\tau}$ (B) $\frac{\sigma d}{3L\tau}$
 (C) $\frac{\sigma d}{2L\tau}$ (D) $\frac{\sigma d}{L\tau}$
 (E) 以上皆非

