



重點整理 1-1 微分方程式的稱謂

許多「自然現象」及「幾何圖形」，其系統所呈現的「狀態 (state)」經常牽扯到「極微量 (infinitesimal) 的變動因素」，由於「微分學 (Calculus)」原本即是研討微量變動對整體表現影響程度的數學。因此，當我們嘗試用數學方法來描述這些「自然現象」及「幾何圖形」時，便會引進許多「微分係數 (differential coefficients)」以利這些微量變因的具體呈現。其實，我們不難發現：

許多「自然現象」及「幾何圖形」都能用「含導函數 (contain derivative) 的方程式」來加以描述。基於這樣的認知，我們希望藉由下述的名詞定義，能讓同學確切瞭解。

【何謂微分方程式】

1. 「微分方程式 (differential equation)」：

含有某些未知函數 (unknown function) 及其導函數 (可能不含未知函數自身，但必含未知函數的導函數) 的方程式。

2. 微分方程式的「階數 (order)」 (由最高階導函數決定)：

方程式中出現之最高階導函數的微分階數。

3. 微分方程式的「次數 (degree)」 (由最高階導函數決定)：

方程式中出現之最高階導函數的最大次方數。

4. 「線性 (linear)」微分方程式：

當微分方程式的「未知函數及其各階導函數」：

(1) 都是一次式 (亦即，不允許出現如： y^2 , $(y')^3$, ...)。

(2) 都不是超越函數 (亦即，不會出現在合成函數的變數位置～不允許出現如：

$\sin(y)$, $e^{y'}$, $\ln(y'')$, ...)。

(3) 未知函數與其各階導函數～彼此間，沒有「乘／除」運算關係 (亦即，不允許出現如：

yy' , $y'y''$, $\frac{y'}{y''}$, ... 但，允許出現如： xy , xy' , ... 的「乘／除」運算關係)。

5. 「非線性 (non-linear) 微分方程式」：

微分方程式的「未知函數及其各階導函數」不滿足上述「線性 (linear)」微分方程式的任意一個要件。



歐吉桑的補充說明

1. 微分方程式又可區分成兩大類：

- (1) 「常微分方程式 (ordinary differential equation)」：
「只含常導函數」的微分方程式並簡記為「O.D.E」。
- (2) 「偏微分方程式 (partial differential equation)」：
「含有偏導函數」的微分方程式並簡記為「P.D.E」。

2. 微分方程式的「稱謂」格式：

? 階? 次	線性	O.D.E
	非線性	P.D.E



精選範例

例題 1 Give the conditions of $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ and $d(y)$ so that the following equation be linear
 $a(x, y)y'' + b(x, y)y' + c(x, y)y = d(y)r(x)$

【重點分析】

因「O.D.E 線性與否」，只與(1)未知函數；(2)未知函數的各階導函數有關，故盡量分離出僅含 x 之函數。

▶▶▶▶ Sol

為了分離出僅含 x 之函數，故將原 O.D.E 改寫成：

$$\frac{a(x, y)}{d(y)}y'' + \frac{b(x, y)}{d(y)}y' + \frac{c(x, y)}{d(y)}y = r(x)$$

∴當 $\frac{a(x, y)}{d(y)}, \frac{b(x, y)}{d(y)}, \frac{c(x, y)}{d(y)}$ 只為 x 之函數（不含「 $y, y', y'', \dots$ 」），便可保證原 O.D.E 為線性 O.D.E

- 例題 2**
- (1) $\frac{dy}{dx} = \cos x$
 - (2) $(x+y)^2 \frac{dy}{dx} = 1$
 - (3) $x \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = xy$



$$(4) \frac{d^2y}{dx^2} + 14y = 0$$

$$(5) [1 + (\frac{dy}{dx})^2]^{\frac{1}{2}} = 2 \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$(6) x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} - u = 0$$

$$(7) (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) - (\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})^2 = 0$$

▶▶▶▶ Sol

- (1) 一階一次 線性 O.D.E
 (2) 一階一次 非線性 [$\therefore (x+y)^2$] O.D.E
 (3) 一階二次 非線性 [$\therefore (\frac{dy}{dx})^2$] O.D.E
 (4) 二階一次 [$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}$] 線性 O.D.E
 (5) 二階二次 [$\therefore 4(\frac{d^2y}{dx^2})^2$] 非線性 [$\therefore (\frac{dy}{dx})^2$ 及 $4(\frac{d^2y}{dx^2})^2$] O.D.E
 (6) 一階一次 線性 P.D.E
 (7) 二階二次 非線性 [$\therefore (\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})^2$] P.D.E

原式先去根號，可改寫成： $1 + (\frac{dy}{dx})^2 = 4(\frac{d^2y}{dx^2})^2$

例題 3

$$(1) \frac{dy}{dx} + 2x + y = 0$$

$$(2) (\frac{dy}{dx})^2 + 2x \frac{dy}{dx} + 3xy^2 = 0$$

$$(3) [1 + (\frac{dy}{dx})^3]^{\frac{1}{2}} = 4 \frac{d^3y}{dx^3}$$

$$(4) y \frac{d^3y}{dx^3} + x^2 (\frac{d^3y}{dx^3})^2 + 5xy^3 + 4 = 0$$

$$(5) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 5$$

$$(6) (\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$(7) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x \sin(u) = 9$$

▶▶▶▶ Sol

- (1) 一階一次 線性 O.D.E
 (2) 一階二次 [$\therefore (\frac{dy}{dx})^2$] 非線性 [$\therefore (\frac{dy}{dx})^2$ 及 $3xy^2$] O.D.E

(3)原式先去根號，可改寫成： $16(\frac{d^3y}{dx^3})^2 - (\frac{dy}{dx})^3 - 1 = 0$ ，故為三階二次 [$\because 16(\frac{d^3y}{dx^3})^2$]

非線性 [$\because 16(\frac{d^3y}{dx^3})^2$ 及 $(\frac{dy}{dx})^3$] O.D.E

(4)三階二次 [$\because x^2(\frac{d^3y}{dx^3})^2$] 非線性 [$\because y\frac{d^3y}{dx^3}$ ， $x^2(\frac{d^3y}{dx^3})^2$ 及 $5xy^3$] O.D.E

(5)二階一次非線性 [$\because u(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$] P.D.E

(6)二階二次 [$\because (\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})^2$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$] 非線性 [$\because (\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})^2$] P.D.E

(7)二階一次 [$\because \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$] 非線性 [$\because x \sin(u)$ 的 u 出現在合成函數的變數位置] P.D.E



重點整理 1-2 常微分方程式的產生方式

【如何造出常微分方程式】

1. 消去法：

將描寫「圖形族」(如：同心圓族，橢圓族，...) 的方程式「逐次微分」，直至消去方程式所有的「參數 (parameter)」(參數 = 可任意指定值的常數代號) 為止。如此便可以得到一個對應這項「圖形族」的常微分方程式。

2. 解析法：

根據「自然現象特性」並結合相關的「科學理論分析」，也可以得到一個對應這項「自然現象」的常微分方程式。



歐吉桑的補充說明

1. 「消去法」造出的常微分方程式，通常跟「幾何問題」有關。
2. 若「圖形族」方程式，「含 n 個參數」，則其對應的「最低階」常微分方程式，必為「 n 階」常微分方程式。



精選範例

例題 1 試求出下列曲線族之微分方程式：

- (1) 所有以原點為圓心之圓族
- (2) 所有在 xy 平面上之圓
- (3) 所有在標準位置之橢圓

【重點分析】

與幾何問題有關，用消去法造 O.D.E ... n 個參數對應 n 階 O.D.E。

▶▶▶ Sol

微分時，把 y 視為 x 的函數

(1) 把「 $x^2 + y^2 = c$ 」

一次微分 $\Rightarrow 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow yy' + x = 0$ 為所求之 O.D.E

(2) 把「 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c$ 」

微分一次只消去一個參數 c

一次微分 $\Rightarrow 2(x-a) + 2(y-b)y' = 0$

微分時，把 y 視為 x 的函數

$$\text{二次微分} \Rightarrow 2 + 2(y-b)y'' + 2(y')^2 = 0$$

$$\text{三次微分} \Rightarrow y'''(y-b) + y'y'' + 2y'y'' = 0 \cdots (*)$$

$$\text{將 } y-b = \frac{-1-(y')^2}{y''} \text{ 代入 } (*) \text{ 式得:}$$

$$[1+(y')^2]y''' - 3y'(y'')^2 = 0 \text{ 為所求 O.D.E}$$

$$(3) \text{ 把 } \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right] \quad \text{微分時, 把 } y \text{ 視為 } x \text{ 的函數}$$

$$\text{一次微分} \Rightarrow \frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{a^2} = -\frac{yy'}{xb^2} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{二次微分} \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{yy'' + (y')^2}{b^2} = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ 代入 } \textcircled{2} \text{ 得: } xyy'' + x(y')^2 - yy' = 0 \text{ 為所求 O.D.E}$$

已消去兩個參數 a, c !

還有參數 b ~ 再繼續微分!

三個參數作了三次微分, 理應已看不到參數! 此時, 不要再「微分」了, 要設法用「代換」方式除去最後一個參數 b !

還有參數, 繼續微分!

已微分兩次, 開始用「代換」方式除去參數!

例題 2 找出一個二階 O.D.E 使其一般解是切於 x 軸且軸平行於 y 軸之拋物線族。

【重點分析】

幾何問題...用消去法。

►►►► Sol

∵ 軸平行於 y 軸且切於 x 軸

$$\therefore \text{可設此拋物線族為: } y = c(x-a)^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{一次微分} \Rightarrow y' = 2c(x-a) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{二次微分} \Rightarrow y'' = 2c$$

$$\text{由 } \textcircled{2} \text{ 得: } 2c = \frac{y'}{x-a}, \text{ 且 } \frac{\textcircled{1}}{\textcircled{2}} \text{ 得: } (x-a) = \frac{2y}{y'}$$

$$\therefore \text{可得: } y'' = \frac{y'}{(x-a)} = \frac{y'}{\frac{2y}{y'}} \Rightarrow 2yy'' - (y')^2 = 0 \text{ 為所求 O.D.E}$$

微分時, 把 y 視為 x 的函數
並繼續微分!

已微分兩次, 開始用「代換」
方式除去參數!

例題 3 考慮如圖的機械系統, 物體質量為 m , 彈簧常數為 $k \text{ N/m}$, 物體與地面間摩擦係數為 $B \text{ N} \cdot \text{sec/m}$, 且物體受力量 F 的拉力, 試求物體運動的微分方程式。

【重點分析】

物理問題...用解析法。

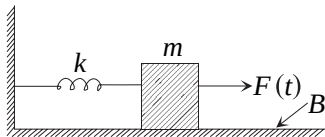
►►►► Sol

設物體 m 的中心點為原點 O , 則由牛頓第二運動定律: $\Sigma F = ma$ 可得:

$$F(t) - kx(t) - B \frac{dx(t)}{dt} = m \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

(位置)' = 速度, (位置)'' = 加速度,
摩擦力 = $B \times$ 速度, 且彈簧恢復力 = $k \times$ 伸長量。

$$\therefore \text{移項可得所求 O.D.E 為 } m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + B \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = F(t)$$





重點整理 1-3 常微分方程式～解的分類

若「函數 $y=g(x)$ ／關係式 $f(x,y)=0$ 」在集合 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 上，滿足「 n 階」常微分方程式

$$F(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}) = 0$$

則稱：

1. 函數 $y=g(x)$ 是「 n 階」常微分方程式在 Ω 上的「顯函數解 (explicit solution)」。
2. 關係式 $f(x,y)=0$ 是「 n 階」常微分方程式在 Ω 上的「隱函數解 (implicit solution)」。



歐吉桑的補充說明

1. 不管是「函數 $y=g(x)$ ／關係式 $f(x,y)=0$ 」，只要在集合 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 上，滿足「 n 階」常微分方程式，我們都稱它們是「 n 階」常微分方程式在 Ω 上的「解 (solution)」，並稱其「解圖形 y 」是「 n 階」常微分方程式之「積分曲線 (integral curve)」。
2. 討論「 n 階」常微分方程式的「解 (顯函數解／隱函數解)」，須留意：
 - (1) 「解」是在哪一個定義域集合 Ω 上討論。
 - (2) 「解」在定義域集合 Ω 上，它們是否滿足「 n 階」常微分方程式。

【 n 階常微分方程式～解的種類】

1. 「通解 (general solution)」：

能表現「絕大多數」解形態的「解通式」

～「 n 階」常微分方程式的「通解」，一般會「含 n 個參數 $c_1, \dots, c_n$ 」。
2. 「特解 (particular solution) y_p 」：

「能夠」經由指定「通解的參數值 $c_1, \dots, c_n$ 」，便可獲得的解。
3. 「奇異解 (singular solution)」：

「無法」由「通解」的「解通式」表現出來的解

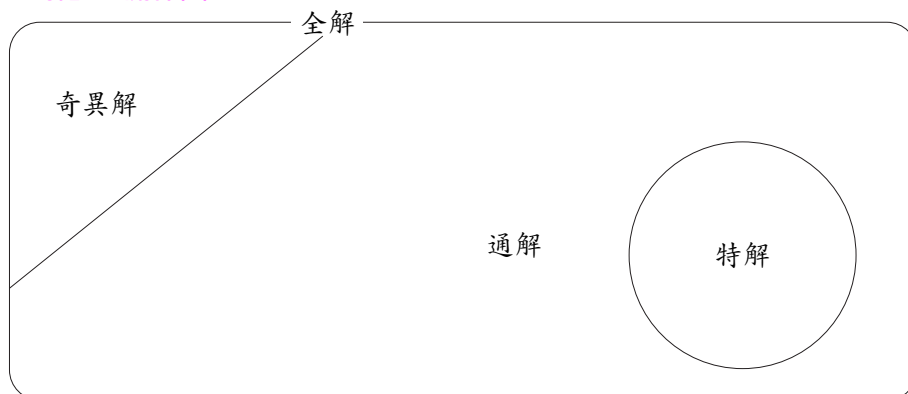
～通常，會「再微分」常微分方程式，以便先「除去未知函數」，再設法求得奇異解！
4. 「全解 (complete solution) y_c 」：

能表現「所有」解形態的「解通式」

～「沒有奇異解」的常微分方程式，其「通解 = 全解」。

～「有奇異解」的常微分方程式—「沒有全解，至多只能有通解」。

【注】「解」的關係圖：



【 n 階常微分方程式～求解問題的種類】

1. 求通解問題。
2. 求全解問題。
3. 求特解問題～又可以再分成兩類：
 - (1) 「初值／柯西」問題 (initial value problem 或 Cauchy problem)

～簡記為「(IVP) 或 (CP)」：

$$\text{求滿足 (IVP/CP)} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{(E) F(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) = 0}^{n \text{ 階 O.D.E}} \\ (IC) \left\{ \begin{array}{l} y(x_0) = y_0 \\ y^{(1)}(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

由在定點 x_0 處的 n 個 $y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}$ 的指定函數值，所組成之初值／柯西條件

的特解

- (2) 「邊界值」問題 (boundary value problem)

～簡記為「BVP」：

$$\text{求滿足 (BVP)} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{(E) F(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) = 0}^{n \text{ 階 O.D.E}} \\ (BC) \left\{ \begin{array}{l} y(x_1) = y_1 \\ \vdots \\ y(x_n) = y_n \end{array} \right. \end{array} \right.$$

由在 n 個不同點 $x_1, \dots, x_n$ 處的 n 個 y 的指定函數值，所組成之邊界值條件

的特解

精選範例

例題 1 試求：滿足 $y^2 + by + ct = 0$ 的微分方程式

【重點分析】

因含兩個參數 b 與 c ，故微分兩次，可消去參數 b 與 c … 原式為 O.D.E 之隱函數解。

►►► Sol

$$\text{一次微分} \Rightarrow 2yy' + by' + c = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

微分時，把 y 視為「 t 」的函數。

$$\text{二次微分} \Rightarrow 2(y')^2 + 2yy'' + by'' = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

繼續微分

$$\text{由}\textcircled{2}\text{式得：} b = \frac{2(y')^2 + 2yy''}{-y''}, \text{代入}\textcircled{1}\text{得：} c = -2yy' + \frac{2(y')^3 + 2yy'y''}{y''}$$

用「代換」方式除去參數。

$$\text{再將 } b \text{ 與 } c \text{ 代回原式} \Rightarrow y^2 - \frac{2y(y')^2 + 2y^2y''}{y''} - 2yy't + \frac{2(y')^3 + 2yy'y''}{y''} t = 0$$

$$\text{可得：} y^2y'' + 2t(y')^3 - 2y(y')^2 - 2y^2y'' = 0 \text{ 為所求 O.D.E}$$

有「隱函數解」 $y^2 + by + ct = 0$ 。

例題 2 試求：以 $y = ax^2 + bx$ 為其顯函數解的最低階 O.D.E

【重點分析】

微分兩次去參數 a, b 。

►►► Sol

$$\therefore y = ax^2 + bx \cdots \cdots (*)$$

微分時，把 y 視為「 x 」的函數。

$$\therefore \begin{cases} y' = 2ax + b & (\text{一次微分}) \\ y'' = 2a & (\text{二次微分}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{y''}{2} \\ b = y' - xy'' \end{cases} \text{代回} (*)$$

用「代換」方式除去參數。

$$\text{可得：} x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 \text{ 為所求 O.D.E}$$

有「顯函數解」 $y = ax^2 + bx$ 。

例題 3 試求：滿足所給予式子之微分方程式 $ax + \ln|y| = y + b$

【重點分析】

因含兩個參數 a 與 b ，故微分兩次，可消去參數 a 與 b … 原式為 O.D.E 之隱函數解。

►►► Sol

$$\therefore a + \frac{1}{y}y' = y' \quad (\text{一次微分})$$

把 y 視為 x 的函數

$$\therefore \frac{1}{y} y'' - \frac{1}{y^2} (y')^2 = y'' \quad (\text{二次微分})$$

可得： $(y^2 - y)y'' + (y')^2 = 0$ 為所求 O.D.E

有「隱函數解」 $ax + \ln|y| = y + b$ 。

例題 4 Consider the following differential equation

$$x = \frac{dx}{dt}t + a\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + b,$$

where a and b are constants.

(1) Find the general solutions and a singular solution of the above equation.

Hint: differentiate the equation once and...

(2) Show that the general solutions are all tangent to the curve of the singular solution.

【重點分析】

(1) 利用「再微分」O.D.E 方式來求奇異解。

(2) 解析法。

▶▶▶▶ Sol

$$(1) x = x't + a(x')^2 + b \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\Rightarrow x' = x' + t x'' + 2a x' x''$$

$$\Rightarrow x''(t + 2ax') = 0$$

$$(a) x'' = 0$$

$$\Rightarrow x' = c \text{ 代入 } \textcircled{1} \text{ 得：}$$

$$x(t) = ct + ac^2 + b \text{ 為 O.D.E 的 general solution}$$

$$(b) t + 2ax' = 0$$

$$\Rightarrow x' = \frac{-t}{2a} \text{ 代入 } \textcircled{1} \text{ 得：}$$

$$x(t) = b - \frac{1}{4a} t^2 \text{ 為 O.D.E 的 singular solution}$$

(2) 考慮 $x = \frac{-t^2}{4a} + b$ 曲線上任一點之切線：

$$(a) \text{ 曲線上的點 } (t_0, x_0) \Rightarrow x_0 = b - \frac{1}{4a} t_0^2$$

$$(b) \text{ 曲線上點之斜率 } x' = \frac{-t}{2a} \Rightarrow \text{在點 } (t_0, x_0) \text{ 處之斜率} = \frac{-t_0}{2a}$$

$$\therefore \text{通過 } (t_0, x_0) \text{ 之切線為：} x - x_0 = \frac{-t_0}{2a} (t - t_0) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{現再將 } x_0 = b - \frac{1}{4a} t_0^2 \text{ 代入 } \textcircled{2} \text{ 得：} x = \frac{-t_0}{2a} t + \frac{1}{4a} t_0^2 + b$$

$$\therefore \text{令 } \frac{-t_0}{2a} = c \Rightarrow \text{切線為：} x = ct + ac^2 + b \text{ 恰為 O.D.E 的通解。}$$

故「通解」 $x = ct + ac^2 + b$ 為「奇異解」 $x = b - \frac{1}{4a} t^2$ 之「切線」！

a, b 是「已知數」，不是「參數」！

微分時，把 x 視為「 t 」的函數。

再微分 O.D.E，以求「奇異解」。

一階 O.D.E 的「解」

帶一個參數「 c 」

～為「通解」。

一階 O.D.E 的「解」

無法由「通解」獲得

～為「奇異解」。