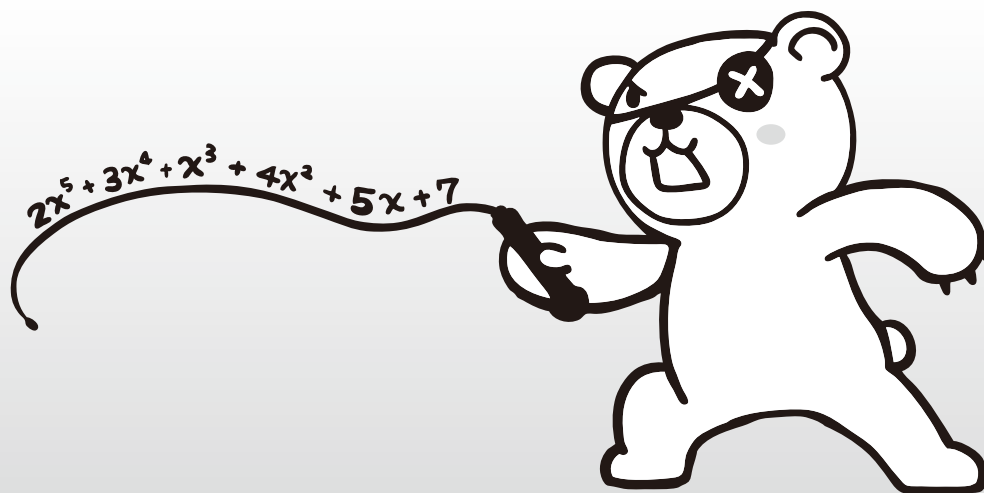


代數1。

# 連分數/比例



## 對號入座

<input type="checkbox"/> 1~6年級一定要會	<input checked="" type="checkbox"/> 7~9年級一定要會	<input checked="" type="checkbox"/> 國中資優班入學檢定
<input checked="" type="checkbox"/> 國小資優競賽	<input checked="" type="checkbox"/> 基測命題重點	<input type="checkbox"/> 國中資優競賽

## 請記得這些定義與策略

1. 「 $A:B$ 的比值 $=\frac{A}{B}$ 」。
2. 「比」的應用問題，必化成「比值分式」來解題。
3. 用「『總量』或『最小單位區域』」當作「比較基準」，來進行「比的整合」。
4. 「正 / 反比： $\frac{x}{y}=k/x \times y=k$ 」問題，先求「正 / 反比常數 $k$ 」。
5. 「連分式（含連等式）/ 比例」問題，必先「分式化，並引入比例常數（再去分母）」，也就是 甲:乙:丙 $=a:b:c$  等同於  $\frac{甲}{a}=\frac{乙}{b}=\frac{丙}{c} \triangleq k$ （比例常數），並常配合「分式交叉相乘相等」與來輔助解題。
6. 「比的整合」，一定要設法使「共同項之比」化為「相同」。
7. 「分數 / 小數」比，必先化成「整數」比。
8. 帶有「加、減關係式」的「連分式」問題，請記得善用「合比 $(\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{x \pm y}{a \pm b})$ 」概念，來輔助解題。

## 例題算一算

例：食鹽水溶液中，食鹽與水的比是 2 : 3，則：

- (1) 175 公斤的食鹽水中，含有食鹽多少公斤？水多少公斤？
- (2) 若在 175 公斤的食鹽水中，倒入食鹽 40 公斤後，則食鹽與水的比是多少？
- (3) 若在 175 公斤的食鹽水中，倒入水 45 公斤後，則食鹽與水的比是多少？



## 策略提示

「比」的應用問題，化成「比值分式」來解題。



## 計算過程：

- (1) 設食鹽有  $x$  公斤  $\Rightarrow$  水有  $175 - x$  公斤

$$\frac{\text{食鹽}}{\text{水}} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{x}{175 - x} = \frac{2}{3} \quad (\text{分式等式必交叉相乘})$$

$$\Rightarrow 3x = 350 - 2x$$

$$\Rightarrow 3x + 2x = 350$$

$$\Rightarrow 5x = 350$$

$$\Rightarrow x = 70 \text{ (食鹽)} \Rightarrow 175 - 70 = 105 \text{ (水)}$$

- (2) 倒入食鹽 40 公斤  $\Rightarrow$  食鹽共  $(70 + 40) = 110$  公斤，而水仍然為 105 公斤

$$\therefore \text{食鹽} : \text{水} = 110 : 105 \text{ (同除以 5)} = 22 : 21$$

- (3) 倒入水 45 公斤  $\Rightarrow$  水共  $(105 + 45) = 150$  公斤，而食鹽仍然為 70 公斤

$$\therefore \text{食鹽} : \text{水} = 70 : 150 \text{ (同除以 10)} = 7 : 15$$

答

(1) 食鹽70公斤，水105公斤 (2) 22:21 (3) 7:15

例：若  $x : y = 2 : 1$ ，且  $2x + y = 20$ ，則  $(3x - 1) : (2y + 5)$  之比值為何？



**策略提示** 「比例問題」必引入「比例常數」。亦即，若  $x : y = a : b$ ，則可把  $x$  設為  $ak$ ， $y$  設為  $bk$ ， $k \neq 0$ 。



**計算過程：**

$$x : y = 2 : 1$$

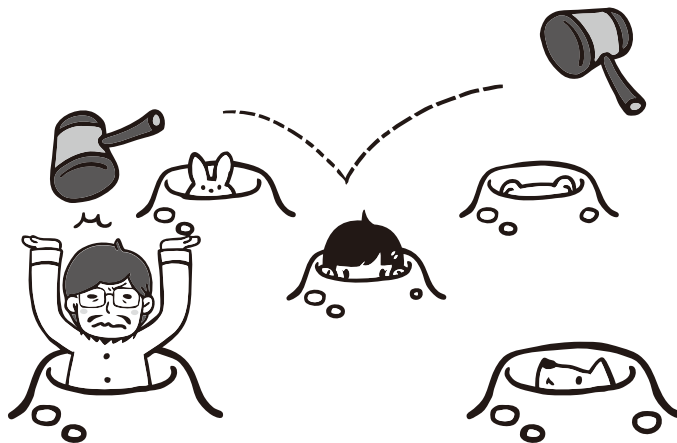
$\therefore$  可設  $x = 2k$ ， $y = k$  ( $k$  為比例常數)

$$\Rightarrow 2 \times 2k + k = 20 \Rightarrow 5k = 20 \Rightarrow k = 4 \Rightarrow x = 8, y = 4$$

$$\Rightarrow (3x - 1) : (2y + 5) = (3 \times 8 - 1) : (2 \times 4 + 5) = 23 : 13$$

$\therefore$  比值為  $\frac{23}{13}$

**答**  $\frac{23}{13}$



例：設  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{a}$ ，試求  $\frac{a+b+c+d}{a+b+c-d}$  的值。



**策略提示**

「連分式（含連等式）/ 比例」問題，必先「分式化，並引入比例常數（再去分母）」。



**計算過程：**

$$\text{令 } \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{a} = k \quad (\Rightarrow \text{分母 } a, b, c, d \text{ 都不為零} \Rightarrow k \text{ 不為零})$$

$\therefore$  可得：

$$a = bk, b = ck, c = dk, d = ak$$

$$\therefore \boxed{a} = bk = (ck)k = (dk)k^2 = (ak)k^3 = \boxed{a}k^4$$

$$\Rightarrow k = 1, -1$$

$$\Rightarrow a = b = c = d \quad (k = 1); \quad a = -b = c = -d \quad (k = -1)$$

$$\therefore \text{可得：} \frac{a+b+c+d}{a+b+c-d} = \begin{cases} \frac{a+a+a+a}{a+a+a-a} = \frac{4a}{2a} = 2 & (a=b=c=d) \\ \frac{a-a+a-a}{a-a+a-(-a)} = \frac{0}{2a} = 0 & (a=-b=c=-d) \end{cases}$$

$$\therefore \text{可得：} \frac{a+b+c+d}{a+b+c-d} = 2 \text{ 或 } 0$$

**答** 2 或 0

例：在北半球中陸地與海洋面積之比為 3:7，而南半球中陸地與海洋面積之比為 5:26，則地球表面陸地與海洋面積之比為多少？

 **策略提示** 用「『總量』或『最小單位區域』」當作「比較基準」，來進行「比的整合」。

 **計算過程：**

已知：
 
$$\begin{cases} \text{北陸：北海} = 3:7 \text{ (共分10份)} \\ \text{南陸：南海} = 5:26 \text{ (共分31份)} \end{cases}$$
 …注意「上下兩式」所謂的「1份」，

其大小不見得必然相同！

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{北陸佔北半球} = \frac{3}{10} ; \text{北海佔北半球} = \frac{7}{10} \\ \text{南陸佔南半球} = \frac{5}{31} ; \text{南海佔南半球} = \frac{26}{31} \end{cases}$$

∴南、北半球面積相同，皆為地球面積的  $\frac{1}{2}$

$$\therefore \begin{cases} \text{陸地面積} = \frac{1}{2} \times \left( \frac{3}{10} + \frac{5}{31} \right) \text{ 個地球面積} \\ \text{海洋面積} = \frac{1}{2} \times \left( \frac{7}{10} + \frac{26}{31} \right) \text{ 個地球面積} \end{cases}$$

∴所求為：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times \left( \frac{3}{10} + \frac{5}{31} \right) : \frac{1}{2} \times \left( \frac{7}{10} + \frac{26}{31} \right) \text{ (同乘分母最小公倍數，以去分母…同乘以 310)} \\ &= (93 + 50) : (217 + 260) \\ &= 143 : 477 \end{aligned}$$

**答** 143 : 477

例：下表的  $x$  和  $y$  成反比，試求  $\text{ㄅ}^2 + (3\text{ㄅ} - 1) \times \frac{\text{ㄱ} + 4}{3}$  的值：

$x$	20	15	10	5
$y$	ㄅ	ㄅ	10	ㄱ



**策略提示** 「反比： $x \times y = k$ 」問題符先求「反比常數  $k$ 」。



**計算過程：**

$$\because x = 10 \text{ 時, } y = 10 \therefore k = 10 \times 10 = 100$$

所以，

$$20 \times \text{ㄅ} = 100 \Rightarrow \text{ㄅ} = 100 \div 20 = 5$$

$$15 \times \text{ㄅ} = 100 \Rightarrow \text{ㄅ} = 100 \div 15 = \frac{20}{3}$$

$$5 \times \text{ㄱ} = 100 \Rightarrow \text{ㄱ} = 100 \div 5 = 20$$


$$\therefore \text{ㄅ}^2 + (3\text{ㄅ} - 1) \times \frac{\text{ㄱ} + 4}{3} = 5^2 + (3 \times \frac{20}{3} - 1) \times \frac{20 + 4}{3} = 25 + 19 \times 8 = 25 + 152 = 177$$

**答** 177

例：設  $(3x + 5y)$  隨  $(x + 3)$  成反比：

(1) 當  $x = 3$  且  $y = 4$  時，求  $x$ 、 $y$  之關係式。

(2) 接上題，求  $x = 2$  之  $y$  值。

 **策略提示** 「反比： $x \times y = k$ 」問題，先求「反比常數  $k$ 」。

 **計算過程：**

(1) 設  $(3x + 5y)(x + 3) = k$

$$\Rightarrow [3 \times (3) + 5 \times (4)][3 + 3] = k$$

$$\Rightarrow k = 174$$

$$\therefore \text{關係式為：} (3x + 5y)(x + 3) = 174$$

(2) 將  $x = 2$  代入  $(3x + 5y)(x + 3) = 174$

$$\Rightarrow [3 \times (2) + 5y][2 + 3] = 174$$

$$\Rightarrow (6 + 5y) \times 5 = 174$$

$$\Rightarrow 6 + 5y = \frac{174}{5}$$

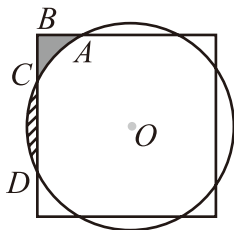
$$\Rightarrow 5y = \frac{174}{5} - 6 = \frac{144}{5}$$

$$\Rightarrow y = \frac{144}{25}$$

**答** (1)  $(3x + 5y)(x + 3) = 174$  (2)  $y = \frac{144}{25}$



例：如圖，圓  $O$  的圓心為正方形兩對角線的交點，



若陰影區域  $ABC$  的面積 = 由  $\overline{CD}$  弦與劣弧  $CD$  所組成弓形區域的面積，試求正方形邊長與圓  $O$  半徑的比值及其周長的比值。

 **策略提示** 利用「 $A : B$  的比值  $= \frac{A}{B}$ 」來解題。

 **計算過程：**

由題目條件「陰影區域  $ABC$  的面積 = 由  $\overline{CD}$  弦與劣弧  $CD$  所組成弓形區域的面積」，經移補代換後，可知：

「正方形面積 = 圓形面積」（一個陰影區域換一個弓形區域）

設正方形邊長  $k$ ，圓半徑  $r$

$$\therefore k^2 = \pi r^2$$

$$\therefore \frac{k}{r} = \sqrt{\pi}$$

$\therefore$  正方形邊長與圓  $O$  半徑的比值  $\sqrt{\pi}$

$$\text{且正方形與圓 } O \text{ 周長的比值 } \frac{4k}{2\pi r} = \frac{4}{2\pi} \times \frac{k}{r} = \frac{4}{2\pi} \times \sqrt{\pi} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

**答** 正方形邊長與圓  $O$  半徑的比值  $\sqrt{\pi}$ ；正方形與圓  $O$  周長的比值  $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$

例：老師與學生兩人現年的年齡比為 7:2，四年前老師與學生的年齡比為 19:4，請算出老師與學生兩人現年各幾歲？



**策略提示** 「比例」問題，必「分式化，並交叉相乘或引入比例常數」。



**計算過程：**

設老師現年  $x$  歲，且學生現年  $y$  歲

$$\text{依題意可得：} \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{7}{2} \\ \frac{x-4}{y-4} = \frac{19}{4} \end{cases} \quad (\text{將比} \sim \text{分式化且交叉相乘})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 7y \dots \times 2 \\ 4x - 16 = 19y - 76 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x = 14y \\ 4x - 16 = 19y - 76 \end{cases} \quad (\text{下式減上式})$$

$$\Rightarrow -16 = 5y - 76$$

$$\Rightarrow 5y = 76 - 16 = 60$$

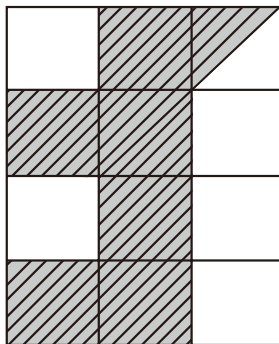
$$\Rightarrow y = 12 \text{ (學生)}$$

$$\text{再將 } y = 12 \xRightarrow{\text{代回}} 2x = 7y$$

$$\text{可得：} 2x = 7 \times 12 = 84 \Rightarrow x = 42 \text{ (老師)}$$

**答** 老師 42 歲，學生 12 歲

例：如下圖，將長方形分成六塊大小相同的正方形，則斜線區域面積與長方形面積的比值為何？



 **策略提示** 以「最小單位區域」當作「比較基準」來解題。

 **計算過程：**

1. 取  三角形面積當作比較基準：

長方形面積 = 12 塊大小相同的正方形面積 = 24 塊大小相同的三角形面積

2. 斜線區域面積 = 6 塊正方形面積 + 1 塊三角形面積 = 13 塊三角形面積

$$\therefore \text{所求} = \frac{13 \text{ 個三角形面積}}{24 \text{ 個三角形面積}} = \frac{13}{24}$$

**答**  $\frac{13}{24}$

例：求下列各組數的連比：

(1)  $a:b = 5:3$  ,  $b:c = 4:7$

(2)  $a:b = 0.5:0.4$  ,  $b:c = 7:11$



策略提示

「比的整合」必從「把共同項化為相同」策略下手來解題。



計算過程：

(1)

$$a:b:c$$

$$5:\boxed{3} \quad \dots \times 4$$

$$\boxed{4}:7 \quad \dots \times 3$$

(取  $\boxed{3}$ 、 $\boxed{4}$  最小公倍數，化為相同)

$$\Rightarrow \text{所求 } a:b:c = 20:12:21$$

(2) 先將「分數／小數」比，化成整數比  $\Rightarrow a:b = 0.5:0.4 = 5:4$

$$a:b:c$$

$$5:\boxed{4} \quad \dots \times 7$$

$$\boxed{7}:11 \quad \dots \times 4$$

(取  $\boxed{4}$ 、 $\boxed{7}$  最小公倍數，化為相同)

$$\Rightarrow \text{所求 } a:b:c = 35:28:44$$

答

(1) 20:12:21 (2) 35:28:44