

單變量函數的極限

第一節 極限的符號與直觀定義

第二節 極限的嚴格數學定義

第三節 極限定理

第四節 分列函數的極限性討論

第五節 分式函數的極限

第六節 根式函數的極限

第七節 無限大處的極限

第八節 夾擠定理的應用

第九節 三角分式的極限

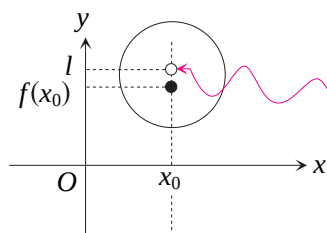
第十節 漸近線



第一節 極限的符號與直觀定義

焦點 1

函數 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 處的「**右極限值 (right limit)**」 $l \in R$ (l 是有限實數～以下相關定義皆具相同限制，不再複述) 存在，意謂著：「**當 x 比 x_0 大 (亦即 x 在 x_0 右側)，但很接近 x_0 時**」，函數值 $f(x)$ 會趨近於有限值 l ，並記之為 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ 。

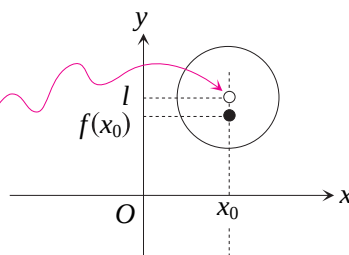


x 自 x_0 右側接近 x_0 ，會使 $f(x)$ 趨近 l ，但 l 不一定剛好等於 $f(x_0)$ 。

焦點 2

函數 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 處的「**左極限值 (left limit)**」 $l \in R$ 存在，意謂著：「**當 x 比 x_0 小 (亦即 x 在 x_0 左側)，但很接近 x_0 時**」，函數值 $f(x)$ 會趨近於有限值 l ，並記之為 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$ 。

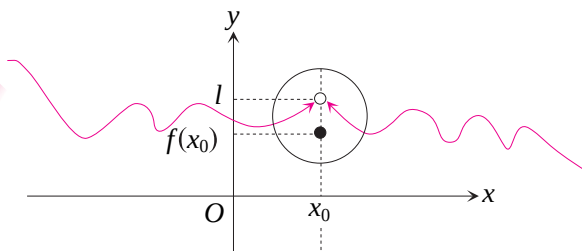
x 自 x_0 左側接近 x_0 ，會使 $f(x)$ 趨近 l ，但 l 不一定剛好等於 $f(x_0)$ 。



焦點 3

函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處的「**極限值 (limit)**」 $l \in R$ 存在，意謂著：「**當 x 不等於 x_0 ，但很接近 x_0 時**」，函數值 $f(x)$ 會趨近於有限值 l ，並記之為 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ 。

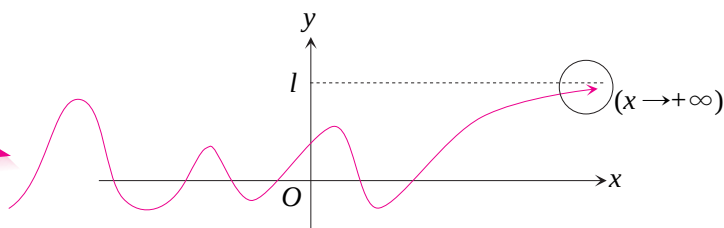
無論 x 自 x_0 左側或右側接近 x_0 ，都會使 $f(x)$ 趨近 l ，但 l 不一定剛好等於 $f(x_0)$ 。



焦點 4

函數 $f(x)$ 在「**正無限大 (positive infinite $+\infty$)**」處的「**極限值**」 $l \in R$ 存在，意謂著：「**當 x 正的夠多時**」，函數值 $f(x)$ 會趨近於有限值 l ，並記之為 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ 。

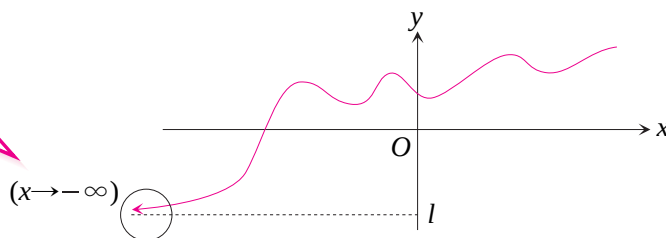
當 x 正的夠多時， $f(x)$ 會趨近於 l 。



焦點 5

函數 $f(x)$ 在「**負無限大 (negative infinite $-\infty$)**」處的「**極限值**」 $l \in R$ 存在，意謂著：「**當 x 負的夠多時**」，函數值 $f(x)$ 會趨近於有限值 l ，並記之為 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ 。

當 x 負的夠多時， $f(x)$ 會趨近於 l 。





歐吉桑的補充說明

1. 極限符號的直觀意義應用——直接代入，便可求得極限值。

如：

例① 求 $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 3x + 4)$ 。

Sol $\because x \rightarrow -1$

$$\therefore x^2 + 3x + 4 \rightarrow (-1)^2 + 3 \times (-1) + 4 = 1 - 3 + 4 = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 3x + 4) = 2$$

例② 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 4}{6x + 2}$ 。

Sol $\because x \rightarrow 1$

$$\therefore \frac{3x - 4}{6x + 2} \rightarrow \frac{3 \times 1 - 4}{6 \times 1 + 2} = \frac{-1}{8}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 4}{6x + 2} = \frac{-1}{8}$$

例③ 求 $\lim_{x \rightarrow 2^-} [x - 2]$ 。

Sol $\because x \rightarrow 2^-$

$$\therefore [x - 2] \rightarrow [-0.??? \text{ (負小數)}] = -1 \text{ (因 } [x] \text{ 代表「不大於 } x \text{」的「最大整數值」)}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2^+} [x - 2] = -1$$

例④ 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 3}$ 。

Sol $\because x \rightarrow +\infty$

$$\therefore \frac{1}{x^2 + 2x + 3} \rightarrow \frac{1}{(+\infty)^2 + 2 \times (+\infty) + 3} = \frac{1}{+\infty} = 0 \text{ (因分母愈大，分數愈小)}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 3} = 0$$



歐吉桑的補充說明

2. 極限存在 $\Leftrightarrow$ 右極限存在、左極限存在，且右極限值 = 左極限值。
3. 在使用習慣上：當 $x \rightarrow x_0^{(\pm)}$ 或 $x \rightarrow \pm\infty$ 時，若發生「 $f(x) \rightarrow \pm\infty$ 」，依極限定義，此情形應為「極限不存在」，但我們仍以「 $\lim_{x \rightarrow x_0^{(\pm)}} f(x) = \pm\infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ 」來描述此一特殊現象。

例① 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$ 。

Sol $\because x \rightarrow 0^+$ 時，分母會「用正的方式，接近於 0」

由於，分母愈小，分數愈大

$$\therefore \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \stackrel{\text{記}}{=} +\infty$ ，但我們仍然稱： $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$ 的極限不存在

例② 求 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 1)$ 。

Sol $\because$ 當 $x \rightarrow -\infty$ 時， $x^3 \rightarrow (-\infty) \times (-\infty) \times (-\infty) = -\infty$

$\therefore x^3 + 1 \rightarrow -\infty + 1 \Rightarrow -\infty$ （負無限大 + 1，還是：負很多 ~ 負無限大）

$\therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 1) \stackrel{\text{記}}{=} -\infty$ ，但我們仍然稱： $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 1)$ 的極限不存在



歐吉桑的補充說明

4. 「 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 極限不存在」，可能是因為：
- (1) 右極限不存在

例 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 。



Sol $\because x \rightarrow 0^+$ 時, $\frac{1}{|x|} = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$

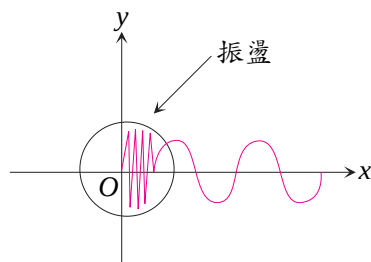
又因, 正弦函數 $\sin(y)$ 的週期為 2π (亦即: 角度變數 y 每隔長度 2π , $\sin(y)$ 圖形便會重複)

$\therefore y = \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ 會使角度變數 y 跑了好多個「 2π 」, 且不能得知「會停在那裡」~

亦即: 當 $x \rightarrow 0^+$ 時, $\sin(\frac{1}{|x|})$ 的圖形, 呈現強烈振盪現象。

$\therefore$ 右極限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(\frac{1}{|x|})$ 不存在

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(\frac{1}{|x|})$ 極限不存在



歐吉桑的補充說明

4. 「 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 極限不存在」, 可能是因為:

(2) 左極限不存在

例

求 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \cos(\frac{1}{|x|})$ 。

Sol 令 $y = -x$ 且 $x \rightarrow 0^-$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos(\frac{1}{|x|}) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos(\frac{-1}{x}) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \cos(\frac{1}{y})$ ~ 如同前例, 呈現強烈振盪現象

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos(\frac{1}{|x|})$ 極限不存在



歐吉桑的補充說明

4. 「 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 極限不存在」, 可能是因為:

(3) 左極限與右極限皆存在, 但左極限 $\neq$ 右極限

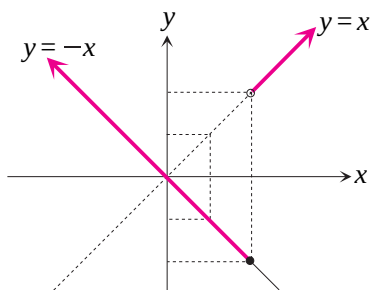
例 求 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ，其中 $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 2 \\ x, & x > 2 \end{cases}$ 。

Sol (1) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{\substack{x > 2 \\ \text{很接近 } 2}} (x) = 2$

(2) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{\substack{x < 2 \\ \text{很接近 } 2}} (-x) = -2$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 \neq -2 = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 極限不存在



歐吉桑的補充說明

4. 「 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 極限不存在」，可能是因為：

(4) 求出來的極限值 $\pm \infty$

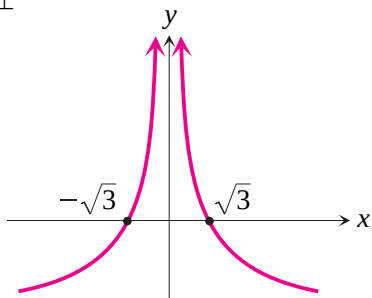
例 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - 3)$ 。

Sol $\because x \rightarrow 0$ 時， $\frac{1}{x^2} \rightarrow (\pm\infty)^2 = +\infty$

$\therefore \frac{1}{x^2} - 3 \rightarrow +\infty - 3 \rightarrow +\infty$ (正無限大 -3 ，還是：正很多 $\sim$ 正無限大)

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - 3) = +\infty$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - 3)$ 極限不存在





歐吉桑的補充說明

4. 「 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 極限不存在」，可能是因為：

(5) 當 $x \rightarrow x_0$ 時， $f(x)$ 的值在跳動，不會趨近一個定值

例 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{|x|}\right)$ 。

Sol $\because$ 如(1)~(2)的舉例一般：

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin\left(\frac{1}{|x|}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{呈現強烈振盪現象} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin\left(\frac{1}{|x|}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin\left(\frac{-1}{x}\right) = -\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{呈現強烈振盪現象} \end{cases}$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{|x|}\right)$ 呈現強烈振盪現象。

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{|x|}\right)$ 極限不存在



歐吉桑的補充說明

5. 函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處「有（左、右）極限」的「圖形特徵」是：

函數 $f(x)$ 的圖形在 $x = x_0$ 附近，其圖形有「（左、右）穩定的趨勢方向」。



說明

由前述各個例子，讀者不難歸納出這項～「有極限」函數的「圖形特徵」。



歐吉桑的補充說明

6. 函數 $f(x)$ 在它「定義域的每一點」都有（左、右）極限，

則稱函數 $f(x)$ 是一個「有（左、右）極限的函數」；

反之，函數 $f(x)$ 「只要」在它「定義域的某一點」（左、右）極限「不存在」，便稱函數 $f(x)$ 「不是」一個「有（左、右）極限的函數」。

