

第一章

基本原理





私塾重點提示區

- 一、機械設計應考慮之因素。
- 二、材料力學基礎計算
- 三、應力集中之計算。

高普考、各類特考與國營事業考試之命題重要性分析

普考	★★★
地方特考四等	★
鐵路特考員級	★★★
高考	★
地方特考三等	★
鐵路特考高員級	★
國營事業招考	★

【內文教學區】



1-1 機械設計與工程材料

一、機件、機構與機械

- (一) 機件：機械中單獨之一項零件，為多數機械或機構所共需使用，且外型、功能及使用目的具有共同性者，機件通常均假設為剛體，如軸承、齒輪、連桿、螺栓等。
- (二) 機構：為數個機件之組合體，各機件間相互依一定之拘束條件運動，且能預期其運動方法，如車床之變速機構、進刀機構、螺絲切削機構、引擎之活塞曲柄機構、閥之操動機構等。
- (三) 機械：由機構組成，除具有機構之特性外，並能接受、傳遞或改變能量而產生有效功或其他效用，如馬達、引擎、發電機、車床等。



二、機械設計

(一) 設計之定義：

1. 創新：為滿足某種需求而創造出前所未有的新型式產品。
2. 改良：針對現有（舊有）產品之缺失加以改善，以提升其效能、可靠度、外型、安全性、舒適性、環保性……等，使產品更具競爭力、更臻完善。

(二) 機械設計：係指具有機械本性之物體或系統之設計，以滿足使用者的需求。例如，各種工業設備、機器、產品、結構、裝置與儀器等。

三、工程材料

(一) 工程上所使用之材料大略可分為金屬材料與非金屬材料兩大類，通常機械設計在計算分析時是假設材料為理想材料。

(二) 工程材料若具備下列三項性質時，即可稱之為理想材料。

1. 完全彈性（Perfect Elasticity）：負荷作用於物體並改變其外形，當負荷移去後物體會完全回復原來的形狀。
2. 均質性（Homogeneity）：即材料任意部位之性質均相同。
3. 均向性（Isotropy）：即材料任意方向之彈性特性均相同。此彈性特性係指材料承受拉伸、壓縮、彎曲及扭轉等負荷時之反應行為。



1-2 機械設計之程序及考慮之因素

一、一般設計之程序

- (一) 認識並了解需求，確定問題之所在。
- (二) 明確的定義問題，列出待設計物之所有規格（如輸入及輸出量、體積尺寸及限制等）。
- (三) 綜合各項已知條件，找出解決問題的方法。
- (四) 分析各種解決方法，並於分析過程中持續且反覆地修正，以找出最佳化的解決方案。
- (五) 對最佳化之設計加以評估，以驗證設計結果是否與所定義之待測物規格相符合；若不符合，則回至過程（三）重新分析。



(六) 當設計結果與問題之規格相符合時，以文字、圖面或敘述之方式將設計結果表達出來。

二、機械設計之程序

- (一) 列舉欲設計機械應具備之條件與功能，作完整之分析和說明。
- (二) 選用一種可以達成所需要之運動的機構。
- (三) 估算出各機件所傳送之能量及承受負荷之大小。
- (四) 選擇各機件可使用的適當材料。
- (五) 由受力大小與允許之變形，依破壞理論或設計準則計算出各機件所需之尺寸。
- (六) 根據以往經驗及判斷來修改計算之尺寸與形狀，使合乎易於加工製造及美觀之要求。
- (七) 繪製含有使用材料與加工方法的各機件詳圖與組合圖，並制定必須的規格說明與操作方法。

三、機械元件設計必須考慮之因素

- | | |
|------------|-------------------|
| (一) 強度。 | (九) 重量及體積。 |
| (二) 剛性。 | (十) 振動及噪音。 |
| (三) 熱潛變。 | (十一) 表面加工。 |
| (四) 腐蝕。 | (十二) 製造程序。 |
| (五) 磨損。 | (十三) 保養維護。 |
| (六) 摩擦與潤滑。 | (十四) 工業及環保相關標準法規。 |
| (七) 成本。 | (十五) 可靠度。 |
| (八) 安全性。 | (十六) 形狀、尺寸與時尚。 |



1-3 電腦輔助分析工具—有限元素法

一、簡 介

- (一) 在機械設計上實際進行應力分析時，我們發現機械設計之基本公式並不够用，主要原因是在實際機械設計上所遇到的幾何形狀往往複雜得



許多。它只能提供一個大略、初步地應力估算，與實際所要設計、分析的結構，不盡然能完全相符。

- (二) 近年來由於電腦軟硬體快速進步，「有限元素分析（finite element analysis）」已成為機械設計上非常重要的電腦輔助分析工具，它可以應用在結構分析、流場分析、熱傳分析、磁場分析、音場分析及混合場分析等各種不同領域的問題上。

二、有限元素分析之基本概念

在機械設計之結構分析上，有限元素分析係將一結構分成許多微小單元，此單元稱為元素（element），每一元素可有若干節點（node），而每一節點可有若干自由度。在結構力學分析，此自由度之廣泛定義包括三個方向位移及三個方向之角位移，經由力學分析可求得每一個元素之平衡方程式，由於結構必須滿足連續性（continuity）條件，因此可連結各別元素之平衡方程式，再得到整體結構之平衡方程式，進而求得結構之承受負荷後的位移變形，最後再求得結構應力、應變等，以完成結構之力學分析。

三、應用有限元素分析軟體之步驟：前處理→求解→後處理

- (一) 前處理器主要之功能，是讓設計者可以在非常友善的使用者介面下，定義有限元素分析模型的幾何形態、負荷和邊界條件。
- (二) 求解器中的動作，是先依據設計者定義的有限元素模型（包括節點、元素、負荷和邊界條件之定義），建立起模型的系統方程式，再對其求解。
- (三) 後處理器是將運算過後得到之結果以圖形的方式輸出，使設計者可以更直覺的感受與判讀。

四、有限元素法之優勢

有限元素分析軟體可定義複雜幾何形狀，給定各種不同負荷狀況和邊界條件，並分析在此負荷與邊界條件下，結構所產生之應力及變形量，甚至作結構振動上之分析等，故有限元素法具有下列優勢：

- (一) 鄰近元素之材料性質不一定要相同，如非均質、非等向性之材料，能利用這種方法之應用以得到不同材料所組成之物體。



- (二) 不規則形狀之邊界，能利用直邊之元素作近似估計，或用曲線邊界作正確配合。
- (三) 元素之大小可以改變，且元素網格亦可擴大或縮小。
- (四) 不連續性之面負荷，利用這種方法不會產生任何困難，故可容易解決混合邊界之條件。



1-4 材料力學基礎複習

1-4-1 應力、應變及靜不定問題

一、應力 (stress) 與應變 (strain)

(一) 應力 (σ)：

1. 負荷 (P) 除以材料的截面積 (A)。
2. 公式： $\sigma = \frac{P}{A}$ ，其中拉應力取為正，壓應力取為負。
3. 若一桿件受 P 之拉力作用，將使桿件伸長，則有大小相同、方向相反之拉力均勻分布在桿的截面積 A 上。

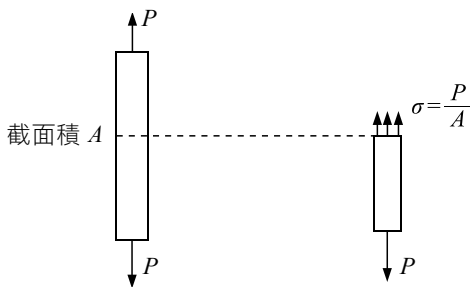


圖 1-1 受拉力負荷之桿件

(二) 應變 (ε)：

1. 變形量 (δ) 除以原來長度 (L)，即單位長度之變形量。
2. 公式： $\varepsilon = \frac{\delta}{L}$ ，其中 ε 為無因次量。

(三) 虎克定律 (Hook's law)：

1. 應力與應變成正比關係，其比值為一常數 E 。



2. 公式： $\sigma = E\varepsilon$ 或 $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ ，其中 E 為彈性模數或楊氏係數。

(四) 變形量之關係式：

$\delta = \frac{PL}{AE}$ ，其中伸長取為正，壓縮取為負。

二、在單方向、兩方向及三方向之應變

(一) 單方向之拉力：

1. 在 x 方向之拉力會使 y 方向產生變形： $\varepsilon_y = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$ 。
2. 在 y 方向之拉力會使 x 方向產生變形： $\varepsilon_x = -\mu \frac{\sigma_y}{E}$ 。
3. μ 為蒲松氏比 (*Poisson's ratio*)，即橫向應變與縱向應變之絕對比值。一般金屬材料之蒲松氏比為 $0.25 \sim 0.35$ 。

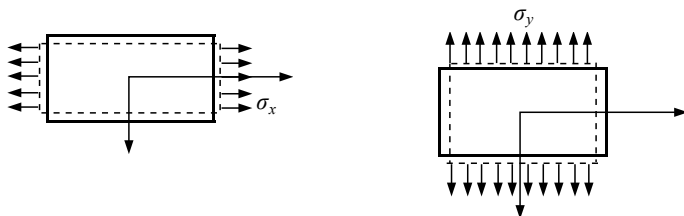


圖 1-2 一方向之應力使另一方向產生變形

(二) 兩方向之拉力：

1. $\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu\sigma_y)$ 。
2. $\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu\sigma_x)$ 。

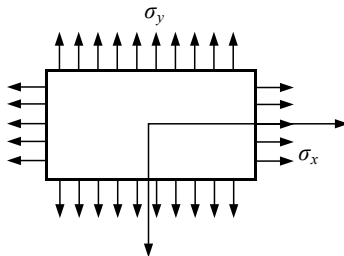
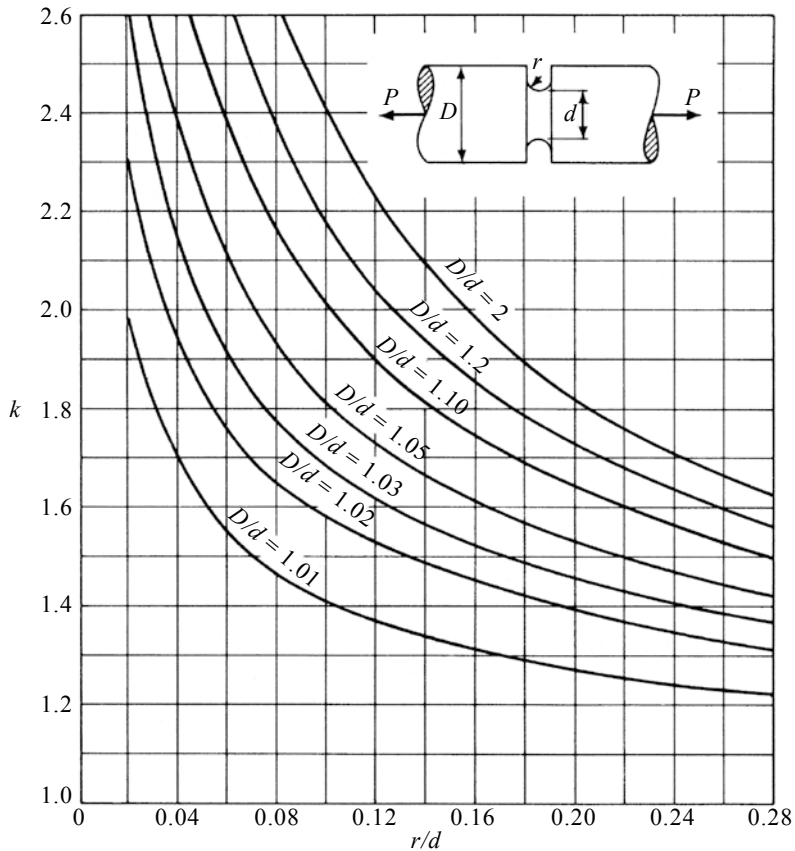


圖 1-3 兩方向之拉力

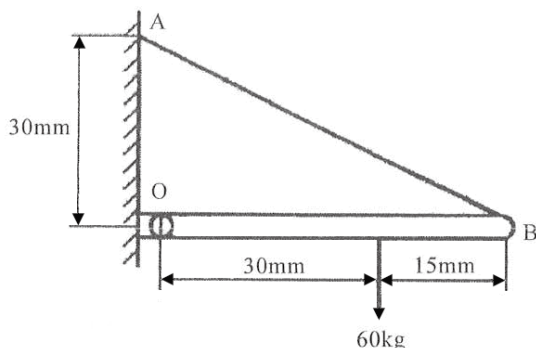


(六) 具有不同槽深之圓軸承受拉伸或壓縮作用。



1-7 精選試題

1. 如下圖，有一由桿與繩組成之結構，假設該桿與繩本身之重量不計，請問 AB 繩之張力及 O 點銷釘之反力？



►►【解析】

取 OB 桿之自由體圖，則：

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{30}{30 + 15} \right) \Rightarrow \theta = 33.69^\circ$$

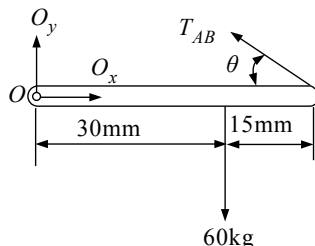
$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow 60 \times 30 = T_{AB} \times \sin 33.69^\circ \times (30 + 15)$$

$$\therefore T_{AB} = 72.11(\text{kg})$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_{AB} \cos \theta = O_x \Rightarrow O_x = 72.11 \times \cos 33.69^\circ = 60(\text{kg})$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 60 - T_{AB} \sin \theta - O_y = 0 \Rightarrow O_y = 60 - 72.11 \sin 33.69^\circ$$

$$\therefore O_y = 20(\text{kg})$$



2. 莫爾圓 (Mohr's circle) 是機械設計常用的分析工具，試就你的了解說明最值得應用的範圍。

►►【解析】

莫爾圓是機械設計常用的分析工具，主要是用圖形來表示平面應力的轉換方程式，該圖極為有用，因為由此可以看出作用在受應力物體內某一點處的不同斜面上之應力，並且可以用來求出材料元素的最大主應力以及最大剪應力和主角度，以了解破壞面之所在，最終之目的在於設計斷面及求出最大容許外力。此外莫爾圓不只可以用在應力上，也適用於數學本性類似的其他量，包括應變與慣性矩。

3. 針對一小型圓球形壓力容器之設計，已知其內含壓力之需求為 10MPa，且由於容量之需求，該容器之直徑設計為 200mm。該容器在製造程序上需經焊接，因此對於使用時所發生的器壁之切線方向應力特別重視，如設計者所選定之安全因數為 2.5，請計算該容器之壁厚應達多少 mm？（該容器所採用之材料抗拉強度為 250MPa）



►►【解析】

$$\text{圓球形壓力容器之應力 } \sigma = \frac{Pr}{2t} = \frac{10 \times \left(\frac{200}{2}\right)}{2t} = \frac{500}{t} \text{ (MPa)}$$

$$\because F.S. = \frac{\sigma_t}{\sigma} \Rightarrow 2.5 = \frac{250}{\left(\frac{500}{t}\right)}$$

$\therefore t = 5(\text{mm})$ ，即該容器之壁厚應達 5mm

4. 一長筒狀鋁合金壓力容器，外徑為 25cm，壁厚為 0.5cm。若此容器可承受之抗拉應力為 80MPa，試用薄壁理論分析此容器最大可承受多少 MPa 的壓力？

►►【解析】

$$\sigma_x = \frac{Pr}{2t} = \frac{P \times \left(\frac{250}{2}\right)}{2 \times 5} = 12.5P(\text{MPa}) \quad , \quad \sigma_y = \frac{Pr}{t} = \frac{P \times \left(\frac{250}{2}\right)}{5} = 25P(\text{MPa})$$

$$\therefore \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{1,2} = \frac{12.5P + 25P}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{12.5P - 25P}{2}\right)^2 + 0} = 18.75P \pm 6.25P$$

$$\therefore \sigma_1 = 25P, \sigma_2 = 12.5P$$

因此， $\sigma_1 = 25P = 80(\text{MPa}) \Rightarrow P = 3.2(\text{MPa})$

5. (1)何謂主平面？何謂主應力？
(2)試說明平面應力莫爾圓的作圖步驟。

►►【解析】

(1)主平面：平面上只有正向應力而無剪應力之平面。

主應力：主平面上的正向應力。

(2)利用半圖解莫爾圓作圖法，解平面應力問題，有以下幾個步驟：

①定出座標系統 $(\sigma_{x_1}, -\tau_{x_1y_1})$ ，如下圖，向右及向下為正。

②定出圓心 $C\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$ 、A 點 $(\sigma_{x_1}, \tau_{xy})$ （即 $\theta = 0^\circ$ 之應力狀態）及 B 點 $(\sigma_y, -\tau_{xy})$ （即 $\theta = 90^\circ$ 之應力狀態）。

③連接 AB 與 σ_{x_1} 軸相交於 C 點，以 C 為圓心， $\overline{CA}$ 為半徑畫出圓，即為所求的莫爾圓。

④利用 $\tan 2\theta_{P_1} = \left| \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right|$ ，求出 $2\theta_{P_1}$ 角。 $2\theta_{P_1}$ 角代表 $\overline{CA}$ 與水平軸（ σ_{x_1} 軸）之夾角，而 $\beta = 2\theta_{P_1} - 2\theta$ 。

⑤由幾何關係求出半徑 $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ 。

⑥ θ 平面之應力為 D 點，其座標 $(\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R\cos\beta, \tau_{x_1y_1} = R\sin\beta)$ 。



等值靜力負載 $F_e = W \times \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}}\right) = 490.5 \times \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 100}{4.83}}\right) = 3684.7\text{N}$

故樑之最大應力為：

$$\sigma_{\max} = \frac{MC}{I} = \frac{\left(F_e \times \frac{L}{4}\right) \times \frac{h}{2}}{2.56 \times 10^6} = \frac{\left(3684.7 \times \frac{500}{4}\right) \times \frac{80}{2}}{2.56 \times 10^6} = 72\text{MPa}$$

【實力養成區】

1. 簡要畫出一延展性 (ductile) 材料之應力應變關係圖 (stress-strain diagram) 並簡要予以說明。 (91 普)

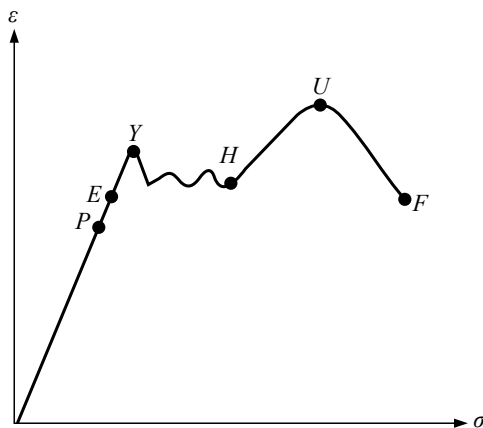
►►【解析】

將一延展性 (ductile) 材料所受的應力 (stress) 和應變 (strain) 作圖，即可得到應力應變關係圖，從此圖中可以取得以下述之參數。

- (1) 比例限：即 P 點，表示材料合乎虎克定律的上限應力，當材料受力低於比例限時，外力去除後材料本身可以恢復原狀而不會產生形變，故此區域亦可稱為彈性區域。彈性區域內曲線的斜率稱為彈性係數或楊氏係數（即 E 值， $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$ ）。
- (2) 彈性限 (Elastic limit) 強度：即 E 點，材料受負載未超過此點時在卸除負載後，試片仍具有彈性可回復至原來之形狀，即試片不會產生永久變形，但圖中之 P 至 E 點之線段並非完美之直線。
- (3) 降伏強度 (Yielding strength)：即 Y 點，當材料進行拉力試驗後，材料開始產生大量塑性變形時之應力；此時材料所產生之應力幾乎保持不變但應變卻迅速增加。有時當材料無明顯之降伏點時，常以材料產生 0.2% 永久應變所相當之應力定義之。
- (4) 應變硬化點強度 (Strain harden strength)：即 H 點，當材料產生大量塑性變性後，晶粒跟著大量滑動，即產生差排現象，差排現象愈明顯，晶粒間之相互干涉也愈嚴重，而要使其繼續產生塑性變形之驅動力也愈大，而到達 H 點之應變時，材料之強度有局部昇高之現象，即材料會產生應變硬化，而該點之強度即稱之為應變硬化點強度。
- (5) 極限強度或最大抗拉強度 (Ultimate or tensile strength)：即 U 點，在拉伸試驗下應力—應變圖上最大之應力值處，通常定義為材料斷裂前所能承受之最大應力。
- (6) 破壞點之應力 (Failure strength)：當材料達極限強度後，有些材料的應力會呈現降低的趨勢直至材料斷裂，而材料斷裂時之應力亦即 F 點之強度。
- (7) 延性 (Ductility)：以拉伸試驗所得之伸長率及斷面收縮率定義之。



(8) 韌性 (Toughness)：拉伸試驗之應力—應變曲線圖下之面積（即韌性模數），即材料斷裂前所能吸收之能量，可說明材料韌性之好壞。



2. 簡單說明莫爾圓 (Mohr's circle) 的用途與其用法。

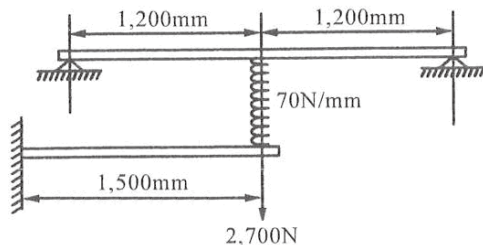
(91 普)

►►【解析】

莫爾圓是機械設計常用的分析工具，主要是用圖形來表示平面應力的轉換方程式，該圖極為有用，因為由此可以看出作用在受應力物體內某一點處的不同斜面上之應力，並且可以用來求出材料元素的最大主應力以及最大剪應力和主角度，以了解破壞面之所在，最終之目的在於設計斷面及求出最大容許外力。此外莫爾圓不只可以用在應力上，也適用於數學本性類似的其他量，包括應變與慣性矩。

3. 如圖所示各鋼樑寬 30mm 及厚 45mm，試求各樑之最大撓曲，已知各樑的彈性模數 $E = 206900\text{MPa}$ 。

(92 專特)



►►【解析】

假設 $y_{\text{上}}$ 為上樑之撓曲， $y_{\text{下}}$ 為下樑之撓曲， F 為上下樑間之彈簧作用力，則：



由上樑之自由體圖可知簡支樑中央受集中力時之撓度為 $y_{\text{上}} = \frac{FL_{\text{上}}^3}{48EI}$

由下樑之自由體圖可知懸臂樑受集中力時之撓度為 $y_{\text{下}} = \frac{(2700 - F)L_{\text{下}}^3}{3EI}$

所以由變位諧和之條件 $y_{\text{下}} = y_{\text{上}} + \frac{F}{k} \Rightarrow \frac{(2700 - F)L_{\text{下}}^3}{3EI} = \frac{FL_{\text{上}}^3}{48EI} + \frac{F}{70}$

由題意已知： $E = 206900(\text{MPa})$ ， $L_{\text{上}} = 2400(\text{mm})$ ， $L_{\text{下}} = 1500(\text{mm})$ ，

$$I = \frac{30 \times 45^3}{12} = 227812.5(\text{mm}^4)$$

$$\therefore \frac{(2700 - F) \times 1500^3}{3 \times 206900 \times 227812.5} = \frac{F \times 2400^3}{48 \times 206900 \times 227812.5} + \frac{F}{70}$$

$$\Rightarrow 0.0239(2700 - F) = 0.0061F + 0.01429F \Rightarrow F = 1457(\text{N})$$

$$\text{故 } y_{\text{上}} = \frac{1457 \times 2400^3}{48 \times 206900 \times 227812.5} = 8.9(\text{mm})$$

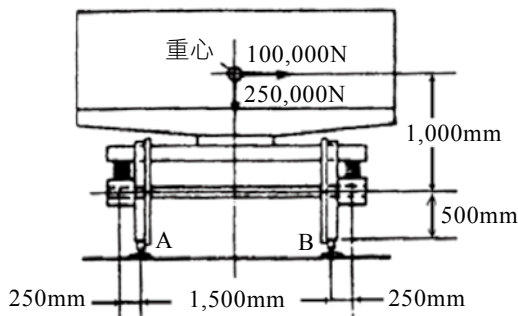
$$y_{\text{下}} = \frac{(2700 - 1457) \times 1500^3}{3 \times 206900 \times 227812.5} = 29.67(\text{mm})$$

4. 如圖所示一貨車的負荷及尺寸，水平負荷（100,000N）是貨車轉彎時的離心力造成。該圖顯示僅系對貨車之一個輪軸。假設離心力僅由外側的輪緣 B 所抵抗。

(1) 繪出一個軸和二個輪子之元件的剪力圖。

(2) 繪出輪軸的彎矩圖。

(93 地特三)



►►【解析】

取整體之自由體圖，如圖(a)所示，則：

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_3 = 100000(\text{N})$$

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow R_1 \times 1500 - 250000 \times \left(\frac{1500}{2}\right) + 100000 \times (1000 + 500) = 0$$

$$\Rightarrow R_1 = 25000(\text{N})，R_2 = 250000 - R_1 = 225000(\text{N})$$