

第一 部分

數學基礎

第 1 章 導 論

第 2 章 函數與模型

第 3 章 函數的極限與連續





第一章

導 論

▲學習目標

能夠瞭解商用微積分的意義，以及商管學生需要學習微積分的原因，並建立商用微積分的基本架構。

▲本章大綱

- 1.1 什麼是商用微積分？
- 1.2 為什麼要學商用微積分？
- 1.3 本書的架構



Chapter 1 導 論

「商用微積分」主要是探討微積分在商學各種領域的應用。本章 1.1 節首先說明什麼是「商用微積分」與其所探討的問題；1.2 節解釋為什麼企管、經濟、會計、財金與財稅……等商管科系學生需要學習「商用微積分」的原因；1.3 節則介紹本書的架構，使學習者能清楚本書的脈絡，以期能夠對「商用微積分」建立初步的「基本架構」。

1.1 什麼是商用微積分？

「微積分」（calculus）為數學中重要的一支，是由英國的牛頓（Newton, 1642-1727）與德國的萊布尼茲（Leibniz, 1646-1716）分別發展出來的數學工具。微積分主要是由「微分」與「積分」兩部分所組成。在數學分析上，微分可用於處理連續曲線「切線斜率的問題」，討論當已知曲線方程式時，如何計算曲線上不同座標點的切線斜率。例如，已知變數 y 與變數 x 的關係為

$$y = 150 + x^2, x \geq 0$$

如圖 1.1 所示。我們可以利用微分的方法計算出圖形在 A 點 ($x=10$) 與 B 點 ($x=20$) 的切線斜率。積分則可用於處理「面積問題」，探討當已知曲線方程式時，如何計算在不同區間內曲線下方與水平軸之間區域的面積。以圖 1.2 為例，利用積分的方法可以計算出在區間 $[10, 20]$ 內圖形曲線下方與水平軸之間斜線區域的面積。

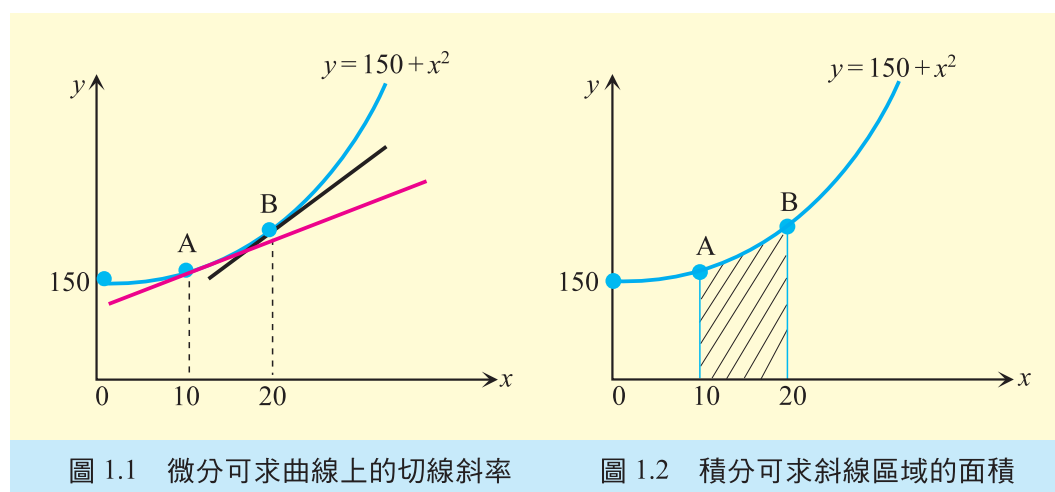


圖 1.1 微分可求曲線上的切線斜率

圖 1.2 積分可求斜線區域的面積

1.1 什麼是商用微積分？

早期微積分主要是應用於自然科學與工程科學的計算。然而，由於管理科學的崛起，數量方法成為企業決策重要的參考依據。商業環境的日益複雜，由於它可提供嚴謹的分析工具，因此逐漸被商學領域的學科所採用，用以協助解決決策問題。在商學領域中，「微分」應用於分析某一變數發生微量變動時對另一變數所產生的「瞬間」影響效果；而「積分」則是用於討論當已知某變數發生微量變動對另一變數的「瞬間」效果時，計算「累積」的影響效果。

例如，若方程式 $y = 150 + x^2$ 表示廠商生產商品的產量（ x ）與成本（ y ）的關係時，利用微分方法可以分別算出產量在 10 單位與 20 單位時，增加一單位產量所增加的額外總成本（經濟學上稱為**邊際成本**，**marginal cost**）。

又若該方程式表示廠商不同產量下（以 x 表示）增加一單位產量的額外成本（以 y 表示）。利用積分的方法可以算出產量變動所增加的總成本。例如，產量由 10 單位增加至 20 單位所增加的總成本，如圖 1.2 斜線面積。

微積分在商學中主要的應用領域有：

1. **企業管理**：行銷部門如何決定利潤最大的廣告預算；生產部門如何評估損益平衡的產量；物料採購部門如何決定其成本最低的經濟批購量；業務部門對市場需求的預測，...

2. **經濟學**：消費者在預算有限的條件下如何決定消費最佳商品組合；廠商如何在市場需求限制下，決定利潤最大的產品訂價，以及成本最低的生產投入組合，...

3. **財務金融**：股票價值的評估；債券的評價；連續現金流量的現值；利率對利息收益影響的評估，...

因此，簡單的說，「商用微積分」就是將微積分的分析方法應用於商業活動的各種決策，以作為決策的參考。

1.2

為什麼要學商用微積分？

對企業的經營者或部門的管理者而言，「如何以最低的投入，達到最高的產出」是一個組織重要的目標。例如，公司的業務經理經常面臨如何將部門內有限的人力、物力與空間作最有效率的運用，以達成組織的目標，如利潤極大化或銷售業績極大化。又如生產部門的廠長，必須要將廠內的人力、機器設備、原物料等有限的資源作最有效的調配，減少資源的浪費，以達成產量的目標。

自從管理科學之父泰勒（Frederick W. Taylor）提出科學的管理之後，以數量方法規劃資源的使用成為重要的工具，而不再完全以決策者主觀的直覺作為決策的依據。尤其是在複雜且多變的競爭環境中，如何將有限的資源作最有效率的運用，更有賴科學的管理，以提高決策的品質。

由於微積分可提供商學嚴謹且精確的分析方法，本書將告訴讀者微積分「如何應用」到商學領域。因此，學好「商用微積分」將有助於對學生未來學習各種商學課程，如經濟學、統計學、管理數學、財務數學、作業研究、數量方法、計量經濟學等學科建立穩固的數學基礎。

1.3 本書的架構

本書分為四大部分：第一部分為商用微積分的數學基礎；第二部分為函數的微分；第三部分為函數的積分；第四部分則為微積分的進階應用，分述如下：

● 第一部分：數學基礎

第 1 章至第 3 章為商用微積分的數學基礎，共三章。第 1 章為導論，說明什麼是商用微積分、為何需要學商用微積分以及本書內容的架構。第 2 章為函數與模型，介紹函數的意義、表示方式、建構的步驟與商學常用的函數。第 3 章為說明函數的極限與連續的基本概念與性質，以作為後續課程的基礎。

● 第二部分：函數的微分

第 4 章至第 8 章為函數的微分，共五章。第 4 章為函數的導數與微分，首先說明函數導數與微分的意義；其次，介紹四種微分的基本方法與如何利用微分估計函數的近似值。第 5 章為特定函數的微分，探討有關指數函數與對數函數的微分方法。第 6 章為多變數函數的微分，討論在自變數在兩個（含）以上時如何進行微分。首先，說明多變數函數的涵義；接著，介紹偏微分與全微分的意義與方法；最後，討論如何在多變數函數下計算高階偏導數與如何應用連鎖律。第 7 章為微分在函數極值的應用，本章為微積分在商學領域最重要的方法之一。首先，說明函數極值的涵義；接著，介紹如何在無限制條件下求取函數的極大值與極小值；最後，介紹拉葛蘭日乘數法以求取限制條件下函數的極大值與極小值。第 8 章介紹微分在不同商學領域的應用，包括經濟學、管理學與財務金融等領域中實際的應用。

● 第三部分：函數的積分

第 9 章至第 12 章為函數的積分，共四章。第 9 章說明函數積分的意義、積分與微分的關係，以及如何以積分計算面積、累積機率分配；第 10 章介紹

Chapter 1 導 論

六種積分的技巧。第 11 章討論多變數函數下的積分與其應用，包含體積與聯合機率分配的計算。第 12 章為積分在商學的應用，包括在經濟學、管理學與財務金融領域的應用。

● 第四部分：進階應用

第 13 章至 14 章為進階應用，共兩章。第 13 章為無窮級數，說明級數的微分與積分、泰勒級數以及無窮級數在商學的應用。第 14 章為基礎微分方程式，介紹微分方程式的意義、解的類型、一階與二階與聯立微分方程式的解法以及在商學的應用。

本書之架構可簡述如圖 1.3 所示。

1.3 本書的架構

