

第 17 章

無母數檢定方法

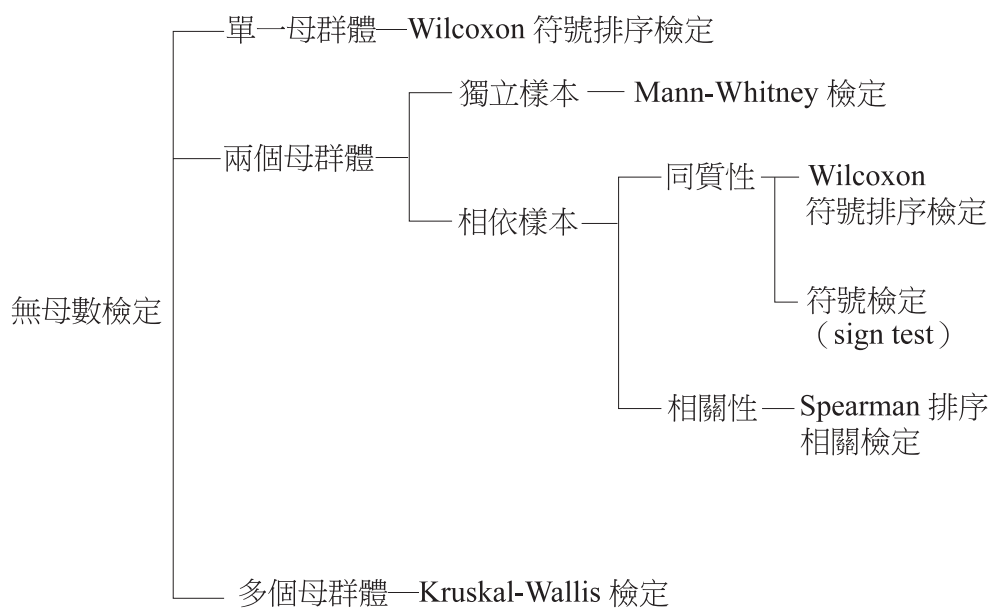


圖 17-0-1 幾個常用的無母數檢定方法

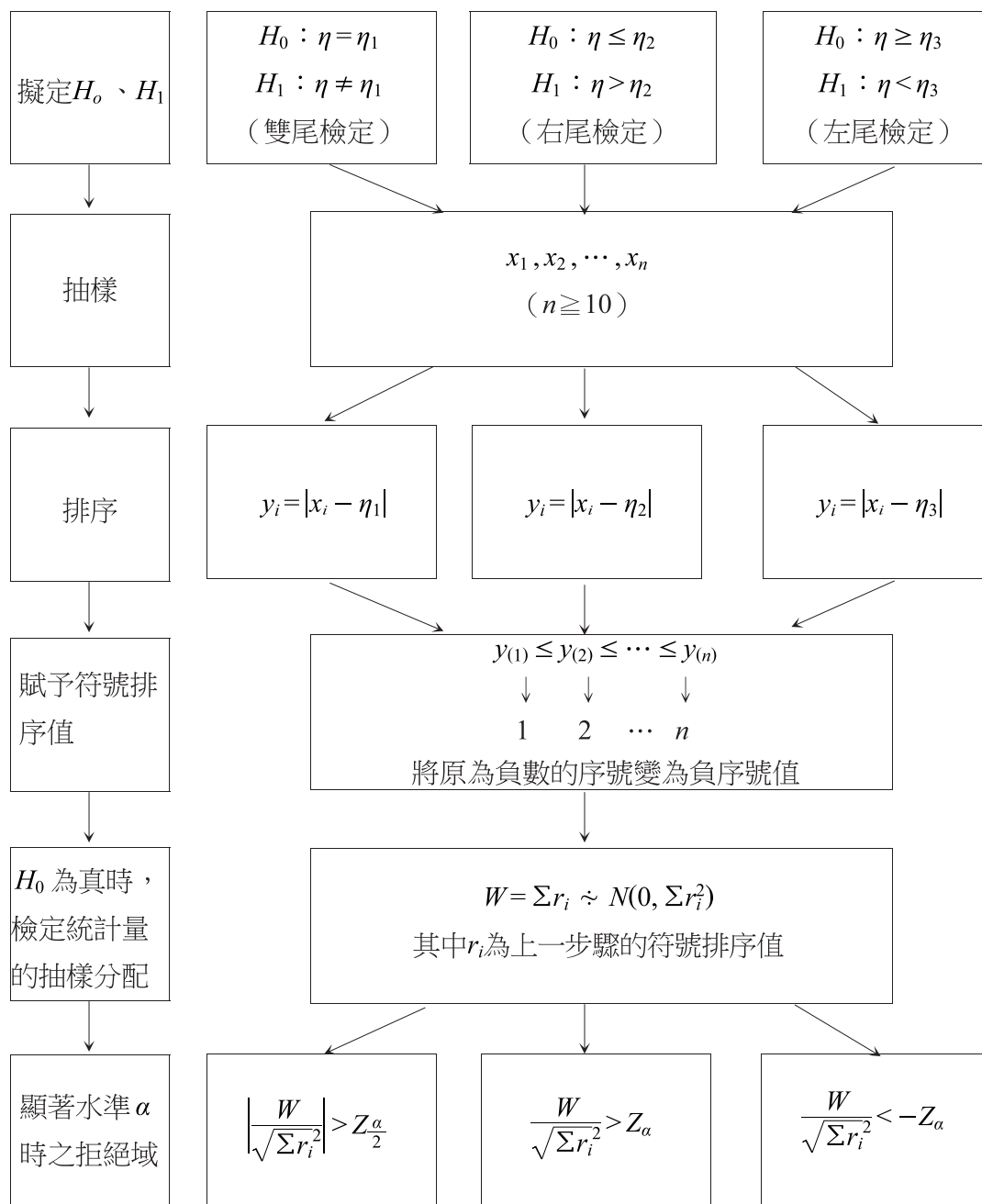


圖 17-1-1 單一母群體 Wilcoxon 符號排序檢定程序

注意事項：本章所有無母數方法中，當排序出現相等值（tied observation）時，取序號平均值。例如 13, 19, 21, 21, 48 這五個數字的排序中第 3 筆及第 4 筆排序值相等（皆為 21），則我們取序號平均值 $\frac{3+4}{2}=3.5$ ，也就是

排序值 13 < 19 < 21 = 21 < 48

 ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

序 號 1 2 3.5 3.5 5

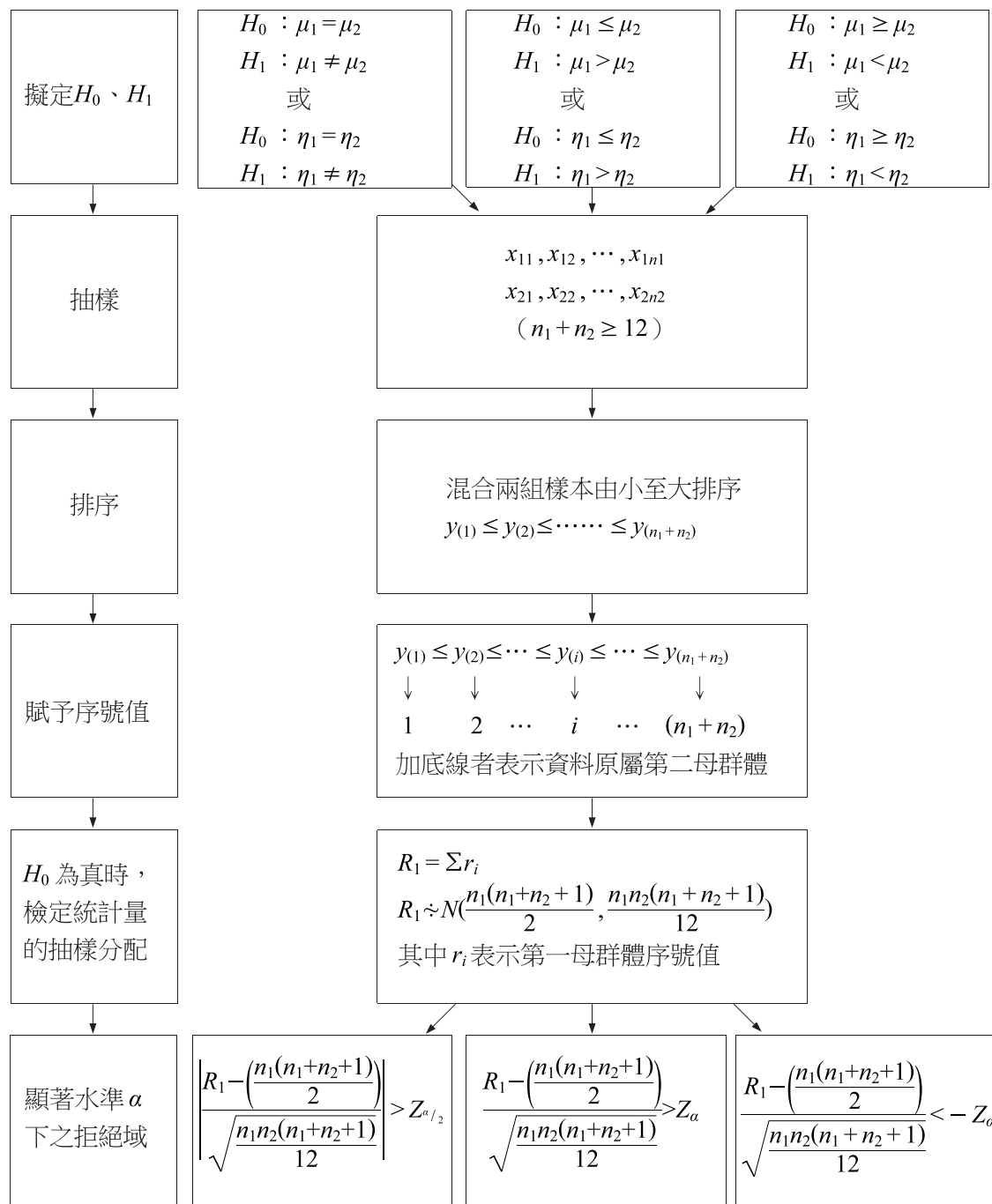


圖 17-2-1 Mann-Whitney 檢定程序

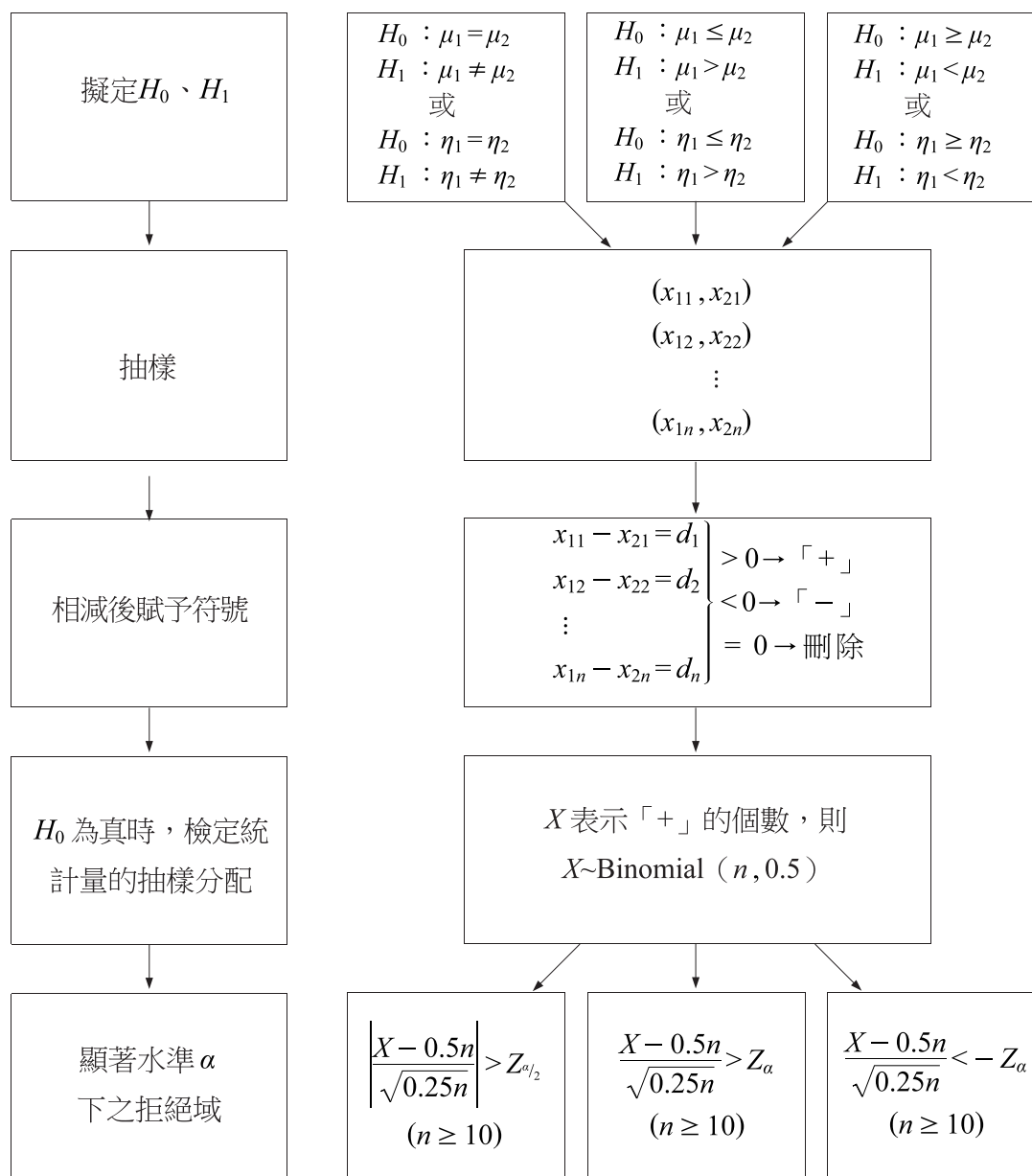


圖 17-2-2 符號檢定的檢定程序

注意事項：當相減值為 0 時，捨去這筆觀測值，同時總樣本數也少 1。

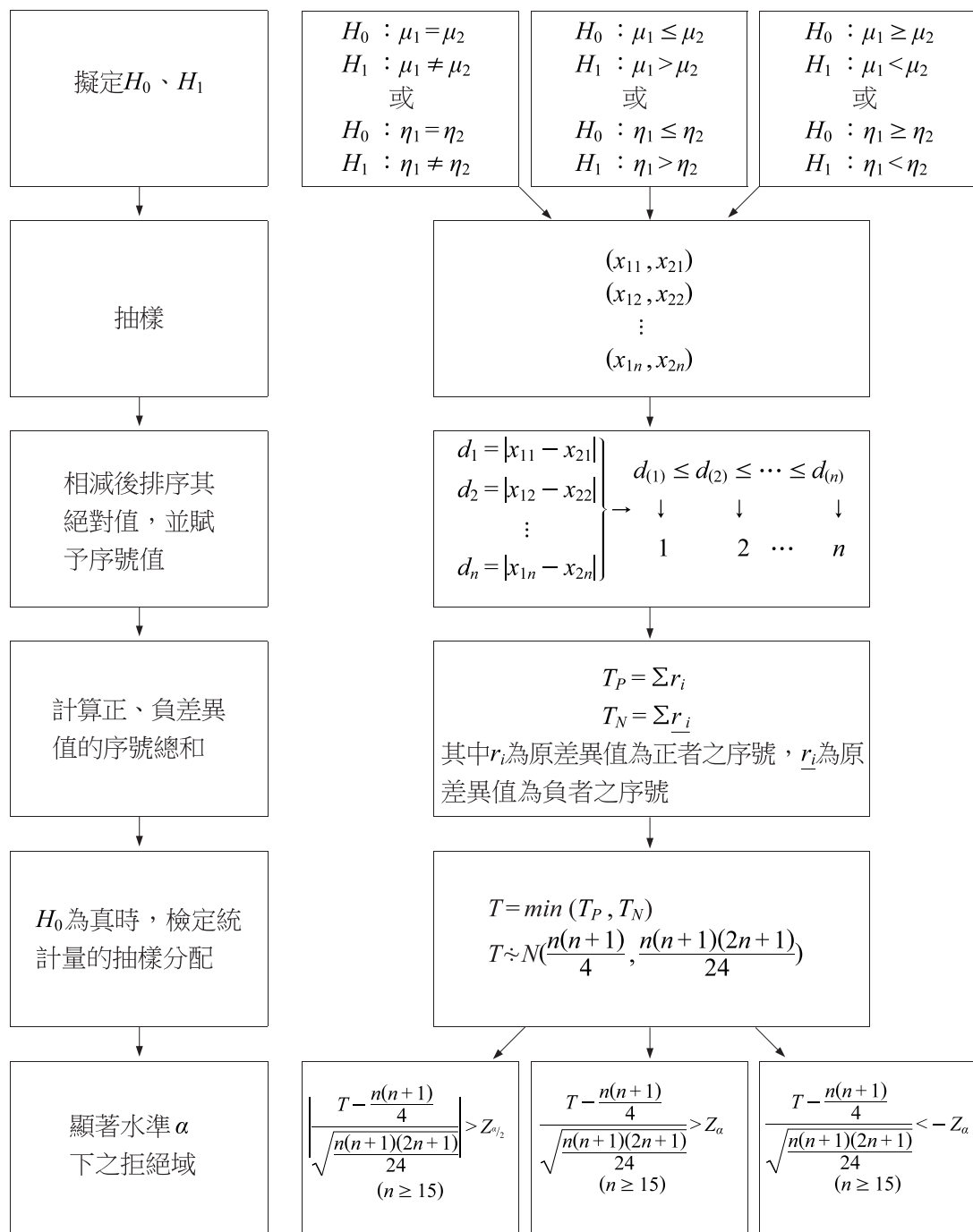


圖 17-2-3 兩組相依樣本的 Wilcoxon 檢定的檢定程序

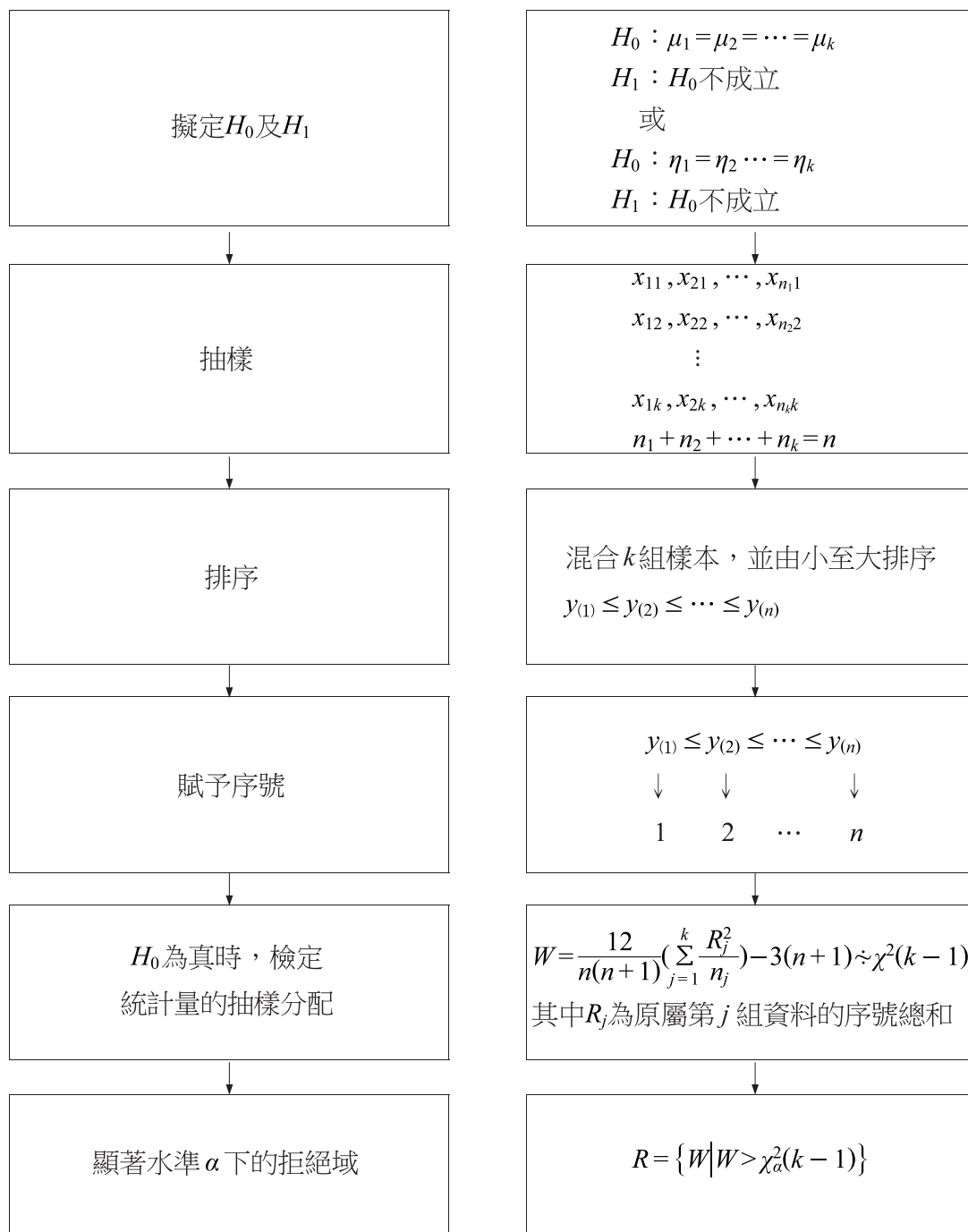


圖 17-3-1 Kruskal-Wallis 檢定的檢定程序

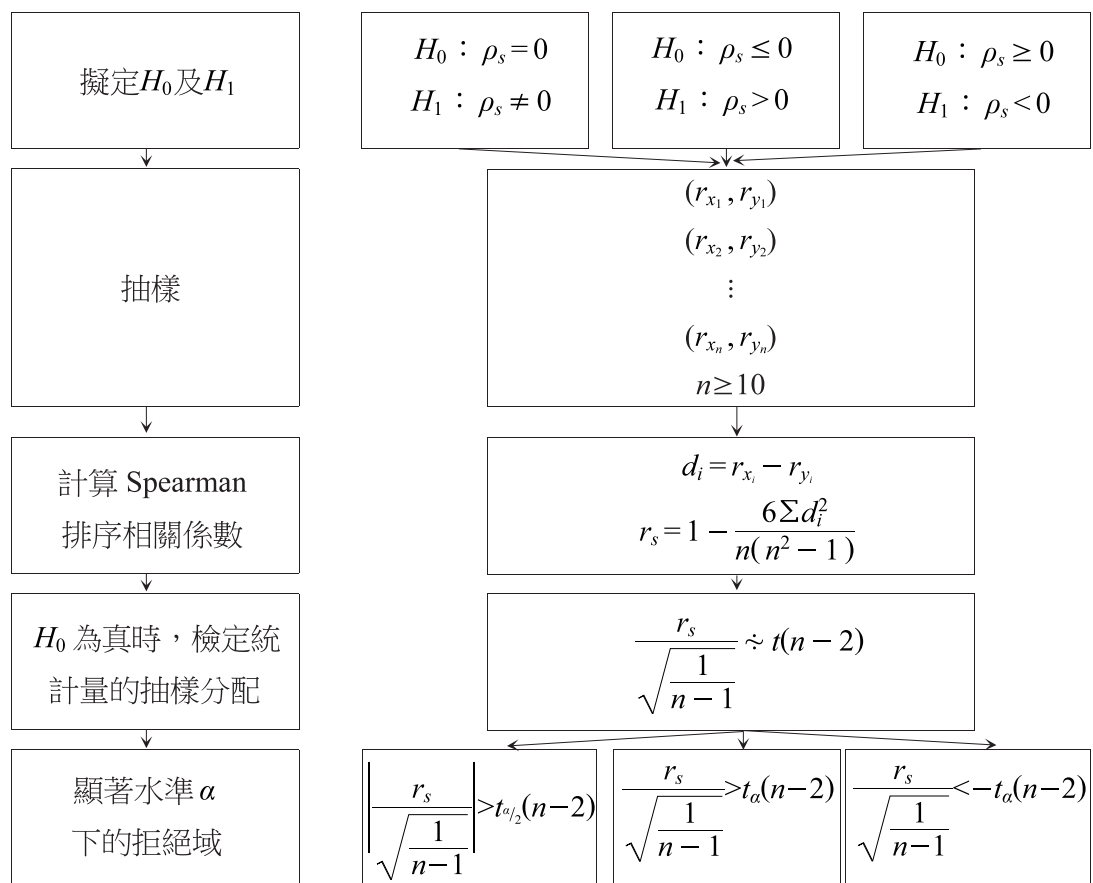


圖 17-4-1 Spearman 排序相關檢定程序圖

17.1 在顯著水準 $\alpha=0.05$ 下，以 Mann-Whitney Test 檢定以下兩組獨立樣本之母群體平均數是否相等。

第一組	2.11	2.78	2.62	2.73	2.69	2.51	2.66	2.80	2.16
樣 本	2.22	2.55							
第二組	2.75	2.48	2.77	2.72					
樣 本									

解：

令 μ_1, μ_2 分別表示第一母群體及第二母群體的平均值，這個檢定的 H_0 及 H_1 為

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

將第一組及第二組樣本混合由小至大排序，如表 E-17-1-1 所示。

表 E-17-1-1

樣本排序	原屬母群體	r_{i1}	r_{i2}
2.11	1	1	
2.16	1	2	
2.22	1	3	
2.48	2		4
2.51	1	5	
2.55	1	6	
2.62	1	7	
2.66	1	8	
2.69	1	9	
2.72	2		10
2.73	1	11	
2.75	2		12
2.77	2		13
2.78	1	14	
2.80	1	15	
		$R_1 = 81$	$R_2 = 39$

364 • 統計學習題解答

計算檢定統計量 R_1

$$R_1 = \sum r_{i1} = 81$$

$n_1 = 11$ ， $n_2 = 4$ 。所以檢定統計量 R_1 的期望值及變異數為

$$E(R_1) = \frac{n_1(n_1 + n_2 + 1)}{2} = \frac{11 \times 16}{2} = 88$$

$$V(R_1) = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12} = \frac{11(4)(16)}{12} = 58.7$$

所以，檢定統計量 R_1 的抽樣分配為近似常態分配

$$R_1 \sim N(88, 58.7)$$

$\frac{\alpha}{2} = 0.025$ ， $Z_{\alpha/2} = 1.96$ 。所以這個檢定的拒絕域為

$$R = \left\{ R_1 \left| \frac{|R_1 - 88|}{\sqrt{58.7}} > 1.96 \right. \right\}$$

由表 E-17-1-1 得知，檢定統計值為

$$\frac{|R_1 - 88|}{\sqrt{58.7}} = \frac{|81 - 88|}{\sqrt{58.7}} = 0.914 < 1.96$$

所以，檢定結果為不拒絕 H_0 ，也就是這兩個母群體的平均數並無顯著差異。

17.2 在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，以符號無母數檢定以下配對樣本所屬的兩個母群體平均數是否相等。

X_i	Y_i
10	8
7	5
5	7
6	6
8	7
8	5
7	7

5	3
7	5
8	6
9	4

解：

首先計算樣本值差並賦予正負號如表 E-17-2-1 所示

表 E-17-2-1

X_i	Y_i	$X_i - Y_i$	符號
10	8	2	+
7	5	2	+
5	7	-2	-
6	6	0	刪除
8	7	1	+
8	5	3	+
7	7	0	刪除
6	3	3	+
6	7	-1	-
5	3	2	+
7	5	2	+
8	6	2	+
9	4	5	+

刪除 2 筆樣本後實際可用的樣本數為 $n=11$ ，令 T 表示 11 個符號中「+」的個數，如果兩母群體平均數相等，則 T 為近似常態分配

$$T \sim N(0.5n, \sqrt{0.25n})$$

所以，這個檢定的 H_0 及 H_1 為

$$H_0 : p=0.5$$

$$H_1 : p \neq 0.5$$

其中 p 為正號出現的機率。 $\frac{\alpha}{2} = 0.025$ ， $Z_{\alpha/2} = 1.96$ 。所以這個檢定的拒絕域 R 為

$$R = \left\{ T \left| \left| \frac{T - 0.5n}{\sqrt{0.25n}} \right| > 1.96 \right\}$$

由試算表 E-17-2-1 計算檢定值為

$$\left| \frac{T - 0.5n}{\sqrt{0.25n}} \right| = \left| \frac{9 - (0.5)11}{\sqrt{0.25(11)}} \right| = 2.11 > 1.96$$

所以檢定結果為拒絕 H_0 ，這表示這兩個母群體的平均數顯著不相等。

17.3 抽樣調查 18 位消費者對 A 、 B 兩種口香糖口味的偏好評比如表 E-17-3-1 所示，在顯著水準 0.05 下以 Wilcoxon 符號排序檢定消費者對 A 、 B 兩種口香糖評比的平均值是否相等。

表 E-17-3-1

A	B
10	6
8	5
6	2
8	2
7	4
5	6
1	4
3	5
9	9
7	8
4	2
5	2

8	1
6	3
8	2
7	6
4	1
8	2

解：

Wilcoxon 符號排序檢定的 H_0 及 H_1 為

H_0 ：兩口香糖的平均評比相等

H_1 ： H_0 不成立

依照 Wilcoxon 符號排序試算如表 E-17-3-2 所示，

$$T_p = \sum r_i = 12.5 + \cdots + 15 = 136$$

$$T_N = \sum \underline{r}_i = 2 + \cdots + 2 = 17$$

$$T = \text{Min}(T_p, T_N) = 17$$

表 E-17-3-2

A	B	$A_i - B_i$	正負號	正序號 R_i	負序號 $\underline{R}_i$
10	6	4	+	12.5	
8	5	3	+	8.5	
6	2	4	+	12.5	
8	2	6	+	15	
7	4	3	+	8.5	
5	6	-1	-		2
1	4	-3	-		8.5
3	5	-2	-		4.5
9	9	0	刪除	刪除	刪除
7	8	-1	-		2
4	2	2	+	4.5	

368 • 統計學習題解答

5	2	3	+	8.5	
8	1	7	+	17	
6	3	3	+	8.5	
8	2	6	+	15	
7	6	1	+	2	
4	1	3	+	8.5	
8	2	6	+	15	
				$T_P = 136$	$T_N = 17$

當 H_0 為真時， T 的期望值及變異數為

$$E(T) = \frac{n(n+1)}{4} = \frac{17(18)}{4} = 76.5$$

$$V(T) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} = \frac{17(18)(35)}{24} = 446.25$$

所以， $\alpha = 0.05$ ， $Z_{0.025} = 1.96$ ，檢定的拒絕域為

$$R = \left\{ T \mid \left| \frac{T - 76.5}{\sqrt{446.25}} \right| > 1.96 \right\}$$

由表 E-17-3-2 得知 $T = 17$ ，計算檢定值

$$\left| \frac{T - 76.5}{\sqrt{446.25}} \right| = \left| \frac{17 - 76.5}{\sqrt{446.25}} \right| = 2.82 > 1.96$$

所以檢定結果為拒絕 H_0 ，也就是消費者對 A、B 兩種口香糖口味偏好的平均值顯著不相等。

17.4 抽樣調查 A、B、C 三校同學在學校附近租屋的月租金支出如表 E-17-4-1 所示，在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下以 Kruskal-Wallis 檢定三校同學月租屋金支出的平均值是否相等。

表 E-17-4-1

A	B	C
3500	3550	4200
3600	4400	3900
4200	4800	4900
5100	5200	5300
6000	5900	5700

解：

Kruskal-Wallis 檢定的 H_0 及 H_1 為

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_1 : H_0 \text{ 不成立}$$

其中 μ_1, μ_2, μ_3 分別為 A 、 B 、 C 三校同學月租屋金的平均數，這個檢定的試算表如表 E-17-4-2 所示。

表 E-17-4-2

A	r_A	B	r_B	C	r_C
3500	1	3550	2	4200	5.5
3600	3	4400	7	3900	4
4200	5.5	4800	8	4900	9
5100	10	5200	11	5300	12
6000	15	5900	14	5700	13
	34.5		42		43.5

A 、 B 、 C 三校的排序總和分別為

$$R_A = 34.5$$

$$R_B = 42$$

$$R_C = 43.5$$

$\alpha = 0.05$ ， $x_{0.05}^2(2) = 5.99$ 。所以檢定的拒絕域 R 為

$$R = \{W | W > 5.99\}$$

由表 E-17-4-2 得知，檢定統計值 W 的計算如下

$$\begin{aligned} W &= \frac{12}{n(n+1)} \left(\sum \frac{R_i}{n_i} \right) \\ &= \frac{12}{(15)(16)} \left(\frac{34.5}{5} + \frac{42}{5} + \frac{43.5}{5} \right) \\ &= 1.2 < 5.99 \end{aligned}$$

所以檢定結果為不拒絕 H_0 ，這表示三校同學月租屋金的平均值並未有明顯的差異。

17.5 在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，檢定表 E-17-5-1 的 (X_i, Y_i) 排序資料是否相關。

表 E-17-5-1

X_i	Y_i
9	9
10	7
6	4
7	10
3	2
4	5
2	7
8	6
5	3
1	1

解：

Spearman 排序相關檢定的 H_0 及 H_1 為

$$H_0 : \rho_s = 0$$

$$H_1 : \rho_s \neq 0$$

Spearman 排序相關檢定的試算如表 E-17-5-2 所示。

表 E-17-5-2

x_i	y_i	$d_i = x_i - y_i$	d_i^2
9	9	0	0
10	7	3	9
6	4	2	4
7	10	-3	9
3	2	1	1
4	5	-1	1
2	7	-5	25
8	6	2	4
5	3	2	4
1	1	0	0
			57

顯著水準 $\alpha = 0.05$ ， $t_{0.025}(8) = 2.306$ 。所以檢定的拒絕域為

$$R = \left\{ r_s \left| \left| \frac{r_s}{\sqrt{\frac{1}{n-1}}} \right| > 2.306 \right\}$$

由試算表 E-17-5-2 計算檢定值為

$$r_s = 1 - \frac{6(57)}{10(10^2 - 1)} = 0.6446$$

372 • 統計學習題解答

$$\frac{r_s}{\sqrt{\frac{1}{n-1}}} = \frac{0.6446}{\sqrt{\frac{1}{9}}} = 1.934 < 2.306$$

所以檢定結果為不拒絕 H_0 ，表示兩變項並不顯著相關。